

Du monde du grain au monde expérimental

Préparation, mesure et espace des phases — cours

Hugues Genvrin

Octobre 2026

Présentation du cours

La proposition de départ

*En mécanique classique, le point matériel est représenté par un point de résolution ; en mécanique quantique, par deux, rattachés aux deux axes du plan complexe (grain fin et grain grossier). La **préparation** P correspond au grain fin, la **mesure** μ au grain grossier. Pris dans la rotation intrinsèque de l'espace, le référentiel de l'expérimentateur tourne avec lui : **tout paraît invariant**.*

Ce que fait le cours

- Il établit des **correspondances structurelles**, dit lesquelles sont exactes, et où elles s'arrêtent.
- Il ne **dérive pas** la mécanique quantique de la théorie du grain.

Deux lectures

1. **Préparation / mesure**, précisée et corrigée sur deux points.
2. **Espace des phases**, où la correspondance est plus précise.

Plan

Rappels

Classique et quantique

Jacobiens et impulsion

Lecture A : préparation et mesure

L'invariance : ce qui est observable

Lecture B : l'espace des phases

Synthèse

Rappels

Ce que la théorie du grain met en jeu

- **Point de résolution.** Au niveau d'observation k , l'unité est le grain g_{-kn_∞} , d'épaisseur $\delta_k = 2^{-kn_\infty}$; il est distinct du point euclidien, de mesure nulle.
- **Plan à deux résolutions.** Axe horizontal au grain fin δ_f , axe vertical au grain grossier $\delta_g = 2^{n_\infty}\delta_f$: deux niveaux **congruents**, de rapport $c = 2^{n_\infty}$. Grille $\Pi(\delta_f, \delta_g) = \delta_f \tilde{\mathbb{Z}} + i \delta_g \tilde{\mathbb{Z}}$, grains rectangles.
- **L'échange J_c .** $J_c(x, y) = (-y/c, cx)$: un aller-retour en résolution, avec $J_c^2 = -\text{Id}$.
- **Le mouvement de rotation intrinsèque.** $\omega = 2^{n_\infty}i$ fait un quart de tour et monte d'une strate ; l'orbite d'une grille est une hélice, de phase d'ordre **4** et de hauteur sans retour. À la promotion, il ne reste que la symétrie d'ordre **4** de $\mathbb{C}$.

Classique et quantique

Le point matériel classique a déjà deux coordonnées

Correction de la prémisse

En mécanique classique, l'état d'un point matériel est le couple (q, p) (position, impulsion) : un point de l'espace des phases, qui est un plan. La différence entre les deux mécaniques n'est pas le nombre de coordonnées, mais la finesse avec laquelle on peut les connaître ensemble.

Proposition 1 (Un niveau, ou deux niveaux liés)

1. Classique : q et p connus simultanément avec une précision arbitraire ; un seul niveau d'observation sur les deux axes : la structure du plan réel.
2. Quantique : $\Delta q \Delta p \geq \hbar/2$ interdit de lire les deux axes au même niveau fin : deux niveaux liés, dont le produit est borné.

Reformulation : le système quantique est représenté par deux points de résolution, fin et grossier, portés par deux axes conjugués.

Jacobiens et impulsion

Qu'est-ce qu'une déformation jacobienne ?

Définition 2 (Déformation jacobienne)

Pour f dérivable d'un axe (domaine) vers un autre (codomaine), le jacobien $f'(x)$ met en relation deux éléments différentiels par l'action de la dérivée :

$$df = f'(x) dx.$$

Il décrit la déformation de l'axe du codomaine par rapport à celui du domaine.

Ce qui n'en est pas une

Un facteur constant qui convertit une grandeur en une autre, de nature différente (la masse, qui convertit une vitesse en impulsion), est un facteur de conversion, pas une déformation jacobienne.

Dans la théorie du grain

La déformation de l'axe du codomaine par excellence est le passage du grain grossier au grain fin, $y \mapsto Jy, J = 2^{-n_\infty}$.

En classique : les jacobiens sont des dérivées temporelles

Proposition 3 (Jacobiens classiques)

1. la **vitesse** déforme les positions : $dq = q'(t) dt$, $q' = p/m$; au second ordre, $d^2q = q''(t) dt^2 = \frac{1}{m} p'(t) dt^2$;
2. la **force** déforme l'impulsion : $dp = p'(t) dt$, avec $p'(t) = F = m q''(t)$ (masse $\times$ accélération).

L'impulsion $p = m q'(t)$ est la masse multipliée par le jacobien $q'(t)$: la masse est un **facteur de conversion**. Pour des vitesses limitées, les deux axes se lisent au même niveau d'observation : le **plan réel**.

Les équations de Hamilton

$$dq = \frac{\partial H}{\partial p} dt, \quad dp = -\frac{\partial H}{\partial q} dt, \quad \text{pour } H = \frac{p^2}{2m} + V(q).$$

Valables aussi, en moyenne, en quantique (**Ehrenfest**) : les jacobiens *par rapport au temps* ne distinguent pas les deux mécaniques. Ce qui les distingue est la relation position / impulsion **à un instant donné**.

En quantique : jacobien, passage au grain fin, quart de tour

Représentation de Schrödinger :

$$p \psi = -i\hbar \psi'(q), \quad [q, p] = i\hbar.$$

Trois ingrédients : le **jacobien** $\psi'(q)$ (dérivée par rapport à la **position**, non au temps), un facteur $\hbar$ **très petit**, un facteur $-i$: un **quart de tour**.

Hypothèse 4 (Échelle d'action)

A unité d'action du niveau macroscopique ; $\hbar = J A, J = 2^{-n_\infty}$.

Proposition 5

Dans l'unité A :

$$p \psi = \omega^{-1} \psi'(q), \quad \omega^{-1} = \frac{1}{2^{n_\infty} i} = -iJ.$$

L'impulsion agit en trois temps : le jacobien $\psi'(q)$; la déformation de l'axe du codomaine par le passage **grossier** $\rightarrow$ **fin** (J) ; un **quart de tour**.

Deux caractères n'existent qu'en quantique

	classique	quantique
impulsion	$p = m q'(t)$	$p \psi = -i\hbar \psi'(q) = \omega^{-1} \psi'(q)$
jacobien	$q'(t), p'(t)$ (en temps)	$\psi'(q)$ (en position)
masse	facteur de conversion	—
changement de grain	aucun	$J = 2^{-n_\infty}$ (grossier $\rightarrow$ fin)
quart de tour	absent	présent ($-i$)
niveaux d'observation	un seul	deux, congruents
q et p	commutent	$[q, p] = i\hbar$

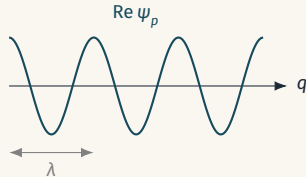
La différence se lit sur le **changement de grain** et le **quart de tour**, qui n'existent qu'en quantique : la même démarcation que celle du plan réel et du plan complexe (*Niveau d'observation*, th. 24).

L'impulsion est une vitesse de rotation le long des positions

Proposition 6 (Hélice de phase)

Un état d'impulsion p a pour fonction d'onde $\psi_p(q) = e^{ipq/\hbar}$. Le long des positions, sa phase tourne à la vitesse $p/\hbar$: un quart de tour sur $\Delta q = \pi\hbar/(2p)$, un tour sur la longueur d'onde de de Broglie $\lambda = 2\pi\hbar/p$.

- Dans $(q, \text{Re } \psi, \text{Im } \psi)$, l'état est une **hélice** : un mouvement de rotation intrinsèque, dont le paramètre est la position.
- L'impulsion en mesure la vitesse ; λ en est le pas.
- Avec $\hbar = JA$ et p limité, $\lambda = 2\pi JA/p$ est d'ordre J .



Le quantique apparaît au niveau fin

Proposition 7

Sous l'hypothèse $\hbar = JA$:

1. au niveau macroscopique (unité A), $\hbar$ est **ponctuel** : le commutateur $[q, p] = i\hbar$ et la phase de l'hélice sont invisibles ; q et p se comportent comme des grandeurs qui commutent ;
2. au niveau fin (unité JA), $\hbar$ vaut exactement **un point de résolution** : commutateur, phase et interférences deviennent visibles.

Preuve. $\hbar/A = J < 1$; $\hbar/(JA) = 1$; λ est d'ordre J .



En une phrase

Le quantique est **ce qui se voit** quand on observe au niveau où J vaut un point de résolution ; le classique est ce qui en reste au niveau grossier.

Deux précautions

1. **Unités.** Position et impulsion n'ont pas la même dimension ; les relier suppose un facteur de conversion, donc une **échelle**. D'où une hypothèse sur le **rapport** de $\hbar$ à une unité d'action, et non sur $\hbar$ seul. Pour un oscillateur, cette échelle est $m\Omega$.
2. **Statut de l'hypothèse.** Physiquement, $\hbar$ est une constante finie ; son rapport aux actions macroscopiques est seulement très petit (de l'ordre de 10^{-34} pour un joule-seconde). L'hypothèse **idéalisée** cette petitesse en un infinitésimal de la théorie du grain : elle rend compte de la **structure** du passage au classique, non de la **valeur** de $\hbar$.

Lecture A : préparation et mesure

Définition 8 (Lecture préparation / mesure)

- grain fin $\delta_f \longleftrightarrow$ préparation P ;
- grain grossier $\delta_g \longleftrightarrow$ mesure μ ;
- propagation du fin vers le grossier $\longleftrightarrow$ passage de la préparation à la mesure.

Le sens fin $\rightarrow$ grossier est celui de la mesure

Une mesure **amplifie** un événement microscopique jusqu'à un enregistrement macroscopique (aiguille, compteur), lisible à un niveau beaucoup plus grossier. La **décohérence** (Zurek) décrit ce passage : les degrés de liberté fins sont moyennés, il reste des variables grossières, classiques.

Une probabilité naît de deux composantes

- Règle de Born :

$$p(m) = |\langle m | \psi \rangle|^2,$$

qui **apparie** un vecteur issu de la préparation ($|\psi\rangle$) et un vecteur issu de la mesure ($\langle m|$).

- Formulations qui rendent l'appariement explicite :
 - formalisme à **deux vecteurs d'état** (Aharonov, Bergmann, Lebowitz, 1964) ;
 - interprétation **transactionnelle** (Cramer, 1986) : onde issue de la préparation, onde conjuguée issue de la mesure.

Pourquoi le plan complexe

Que la théorie quantique ait besoin des complexes, et pas seulement de deux réels, est étudié (Renou et al., *Nature*, 2021), mais **contesté** (préprint, 2026). La structure à deux composantes liées par i reste au cœur du formalisme.

Première correction : couplage, et non intrication

Somme directe et produit tensoriel

L'**intrication** est une propriété d'un état de **deux sous-systèmes** : un état de $H_A \otimes H_B$ est intriqué s'il ne s'écrit pas $|a\rangle \otimes |b\rangle$.

- Le plan complexe est une **somme directe**, $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$, et non un produit tensoriel.
- La préparation et la mesure ne sont pas deux sous-systèmes d'un même état, mais deux **étapes** d'une même expérience.

On parle de **couplage** (ou d'**appariement**) de la préparation et de la mesure, et l'on réserve « intrication » à son sens technique.

Seconde correction : les axes n'ont pas de sens séparé

Proposition 9 (Invariance de phase globale)

$|\psi\rangle$ et $e^{i\theta}|\psi\rangle$ donnent les mêmes probabilités pour toute mesure. Pour $\theta = \pi/2$, le quart de tour $\psi \mapsto i\psi$ échange parties réelle et imaginaire sans rien changer aux prédictions.

Preuve. $|\langle m | e^{i\theta} |\psi\rangle|^2 = |\langle m | \psi\rangle|^2$; $i(x + iy) = -y + ix$. □

Conséquence

« Axe réel = préparation, axe imaginaire = mesure » dépend du repère : un quart de tour de phase, inobservable, échangerait les rôles. Prise isolément, cette correspondance n'a pas de contenu physique.

La section suivante montre que le second paragraphe de la proposition répare exactement ce défaut.

L'invariance : ce qui est
observable

Tout paraît invariant : ce que cela exige

Si le référentiel de l'expérimentateur tourne avec le plan, **seules les quantités invariantes** par la rotation intrinsèque sont observables.

Proposition 10 (Invariants de la rotation)

Rotation commune $z_j \mapsto e^{i\theta} z_j$. Un monôme $z^\alpha \bar{z}^\beta$ est invariant pour tout θ si et seulement si $\sum \alpha_j = \sum \beta_j$; il est alors un produit de termes $z_j \bar{z}_k$.

Preuve. Facteur $e^{i\theta(\sum \alpha_j - \sum \beta_j)}$; si les deux sommes valent d , on apparie un à un les d facteurs z et les d facteurs $\bar{z}$. □

- Observables : les $|z_j|^2$ (probabilités) et les $z_j \bar{z}_k$ (**phases relatives**, interférences).
- L'attribution fin = préparation, grossier = mesure est un **choix de repère**, comme i ou $-i$; l'**appariement** est physique, et la probabilité de Born en est l'invariant.

Avec la dilatation : les états sont des rayons

$\omega = 2^{n_\infty} i$ tourne et dilate. Si l'observateur est pris dans ce mouvement complet, les observables doivent être invariantes par multiplication par tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Proposition 11 (Invariance par $\mathbb{C}^*$)

Les probabilités normalisées $p_j = |z_j|^2 / \sum_k |z_k|^2$ sont invariantes par $z_j \mapsto \lambda z_j$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, en particulier $\lambda = \omega^k$.

Preuve. Numérateur et dénominateur sont multipliés par $|\lambda|^2 \neq 0$. □

Une correspondance exacte

C'est la définition quantique d'un état : un rayon, vecteur défini à un facteur complexe non nul près ; l'espace des états est l'espace projectif. « Tout paraît invariant » traduit ce principe déjà présent en mécanique quantique.

Où la rotation redevient visible

- Une rotation qui emporte tout, observateur compris, est inobservable.
- Elle redevient visible dès que deux systèmes ne tournent pas ensemble : leurs phases relatives $z_j \bar{z}_k$ varient, et cela se voit dans les interférences.

C'est là qu'il faudrait chercher une trace expérimentale d'un mouvement de rotation intrinsèque : non dans un système isolé, mais dans la comparaison de deux systèmes.

Lecture B : l'espace des phases

Le grain rectangle est une cellule de Heisenberg

On place les deux niveaux sur les axes conjugués (q, p) ; unités $\hbar = 1$.

Définition 12 (État comprimé)

Paquet gaussien de largeur σ : $\Delta q = \sigma$, $\Delta p = 1/(2\sigma)$, $\Delta q \Delta p = 1/2$. Pour σ petit : fin en q , grossier en p .

Proposition 13

Un état comprimé réalise la structure du grain rectangle : un axe fin, un axe grossier, une aire minimale fixe. Le rapport de congruence c correspond à $\Delta p / \Delta q$.

Limites

L'aire de la cellule est fixée par la physique ($\hbar/2$), pas celle du grain : il faut choisir l'échelle. $c = 2^{n_\infty}$ serait une compression infinie, et le rapport physique est réel, non entier. La correspondance porte sur la structure.

Le quart de tour est la transformée de Fourier

Proposition 14 (Fourier)

La transformée de Fourier $\mathcal{F}$ (position $\rightarrow$ impulsion) fait tourner la fonction de Wigner d'un angle droit :

1. elle envoie un état fin en q , grossier en p , sur un état grossier en q , fin en p : elle **échange les niveaux** ;
2. $\mathcal{F}^2$ est la **parité** $\psi(x) \mapsto \psi(-x)$: le demi-tour ;
3. $\mathcal{F}^4 = \text{Id}$.

Preuve. Propriétés classiques : $\mathcal{F}^2\psi(x) = \psi(-x)$; la transformée d'une gaussienne de largeur σ est une gaussienne de largeur $1/(2\sigma)$. □

On retrouve le cycle d'ordre 4 et $J^2 = -\text{Id}$ de la théorie du grain.

L'échange J_c est un quart de période d'oscillateur

Proposition 15 (L'échange est symplectique)

1. $\det J_c = 1$: J_c conserve les aires.
2. $J_c = S R S^{-1}$, $S(x, y) = (sx, y/s)$, $s = c^{-1/2}$: un quart de tour lu dans les unités propres de chaque axe.
3. Pour l'oscillateur avec $m\Omega = c$, l'évolution pendant un quart de période (sens rétrograde) est $(q, p) \mapsto (-p/c, cq) = J_c(q, p)$.

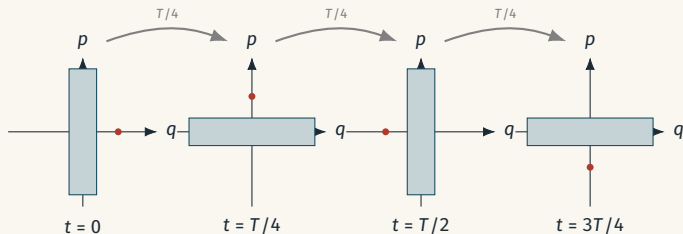
Preuve. (1) $\det \begin{pmatrix} 0 & -1/c \\ c & 0 \end{pmatrix} = 1$. (2) $(x, y) \mapsto (x/s, sy) \mapsto (-sy, x/s) \mapsto (-s^2 y, x/s^2)$, avec $s^2 = 1/c$. (3) $q(t) = q \cos \Omega t + \frac{p}{m\Omega} \sin \Omega t$, $p(t) = p \cos \Omega t - m\Omega q \sin \Omega t$ en $\Omega t = -\pi/2$. □

Non-isométrie de $J_c \leftrightarrow$ échelles différentes en q et p ; conservation des aires $\leftrightarrow$ théorème de Liouville.

La respiration d'un état comprimé

Proposition 16

Sous l'évolution d'un oscillateur, l'espace des phases tourne rigidement. Un état comprimé en q l'est en p au quart de période, de nouveau en q (signes renversés) à la demi-période, et revient à l'identique à la période.



Observé pour la lumière comprimée : le bruit passe d'une quadrature à l'autre deux fois par période. C'est l'image physique la plus directe du mouvement de rotation intrinsèque ; le paramètre est le **temps**, et non le niveau.

Et le changement de niveau ?

- J_c et la rotation conservent les aires ; $\omega = 2^{n_\infty} i$ les multiplie par 2^{2n_∞} : il n'est pas symplectique.
- Dans l'espace des phases, dilater les cellules revient à regrouper des cellules de Heisenberg en une cellule plus grossière : on passe vers une description classique, où la cellule est grande devant $\hbar$.

Les deux lectures se rejoignent

Niveau fin = cellule quantique ; niveau grossier = description macroscopique ; passage de l'un à l'autre = amplification de la mesure. On retrouve le sens fin $\rightarrow$ grossier de la lecture A.

Correspondance plus spéculative : identifier changement de niveau et regroupement de cellules reste à formuler.

Synthèse

Les correspondances et leur statut

théorie du grain	physique	statut
grain fin, grain grossier	préparation, mesure	défendable
passage du fin au grossier	amplification, décohérence	fondé
couplage des deux grains	appariement de Born	fondé ; pas « intrication »
rotation qui emporte l'observateur	invariance de phase globale	exact
rotation et dilatation (ω)	états comme rayons (C^*)	exact
un niveau d'observation	espace des phases classique	exact
deux niveaux liés	inégalité de Heisenberg	exact (structure)
grain rectangle	cellule d'un état comprimé	structurel
quart de tour, $J^2 = -Id$	Fourier, $\mathcal{F}^2 = \text{parité}$	exact
échange J_c	oscillateur, quart de période	exact
rotation intrinsèque	respiration de la lumière comprimée	exact ; temps $\neq$ niveau
changement de niveau	regroupement de cellules	spéculatif
jacobiens temporels ; m conversion	équations de Hamilton	exact
$\psi'(q)$, grain fin J , quart de tour	$p = -i\hbar d/dq = \omega^{-1} d/dq$	exact si $\hbar = JA$
niveau où J vaut un grain	apparition du quantique	structurel

Ce qui est établi, et les limites

- Lecture A défendable si l'on parle de **couplage** et si l'on ne tient pour observables que les **invariants** de la rotation : c'est l'invariance de phase, et avec la dilatation, la définition des **rayons**.
- Lecture B : grain rectangle, quart de tour, J_c et rotation intrinsèque ont des **équivalents exacts** dans l'espace des phases.
- En classique, les **jacobiens** sont des dérivées temporelles (vitesse, force) ; en quantique, au jacobien $\psi'(q)$ s'ajoutent le passage **grossier** $\rightarrow$ **fin** et un **quart de tour**.

Limites

Les correspondances sont **structurelles**. L'échelle ($\hbar$ contre $\delta_f \delta_g$), la valeur du rapport (2^{n_∞} contre une compression finie) et le paramètre (niveau contre temps) diffèrent. Rien ici ne dérive la mécanique quantique de la théorie du grain.

Questions ouvertes

1. **Niveau et temps.** Relier le paramètre de niveau du mouvement de rotation intrinsèque au temps d'une évolution physique, par exemple par la période d'un oscillateur ?
2. **Changement de niveau.** Formuler le regroupement des cellules de l'espace des phases comme changement de niveau d'observation, et le comparer au passage du quantique au classique.
3. **Deux systèmes.** Construire deux systèmes animés de rotations intrinsèques différentes, et exprimer leurs phases relatives, seules observables.
4. **Intrication.** La théorie du grain peut-elle produire un **produit tensoriel** de deux plans ?

- H. Genvrin, *Du monde du grain au monde expérimental ; Niveau d'observation ; Le plan complexe animé d'un mouvement de rotation intrinsèque ; Plan complexe et grain nul ; Théorie du grain*, manuscrits, 2026.
- Y. Aharonov, P. G. Bergmann, J. L. Lebowitz, *Phys. Rev.* **134** (1964), B1410.
- J. G. Cramer, *Rev. Mod. Phys.* **58** (1986), 647.
- W. H. Zurek, *Rev. Mod. Phys.* **75** (2003), 715.
- M.-O. Renou et al., *Nature* **600** (2021), 625–629 ; préprint contraire arXiv:2603.19208 (2026).
- U. Leonhardt, *Measuring the Quantum State of Light*, Cambridge, 1997.
- D. F. Walls, G. J. Milburn, *Quantum Optics*, Springer, 2008.