

Réalité de la mesure et formalisation d'EPR

Le produit sur $\mathbb{R}$ de deux espaces complexes, le singulet et l'inégalité de Bell —
cours

Hugues Genvrin

Octobre 2026

Présentation du cours

Deux questions

Quelle « réalité » peut-on associer à l'unité imaginaire i ? Et comment formaliser fidèlement l'argument d'Einstein, Podolsky et Rosen ?

Ce que le cours établit

1. Sur $W = \mathcal{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{H}$, seul le produit $j = i_1 i_2$ est intrinsèque : le sens de i d'un système seul n'est pas observable.
2. Le secteur conjugué $W_{\neq}$ est l'espace des opérateurs ; l'échange y découpe les observables : c'est la **réalité de la mesure**.
3. L'invariance par échange est une condition sur la **mesure**, non sur l'état d'EPR.
4. Le singulet est l'unique état anticorrélé selon **deux** directions ; le facteur $1/\sqrt{2}$ en découle.
5. L'argument d'EPR, puis l'inégalité de Bell-CHSH.

Sections 1 à 7 : mathématiques et mécanique quantique standard. Section 8 : lecture proposée dans la théorie du grain.

Plan

Motivation

Rappels : le produit sur $\mathbb{R}$

Ce qui est intrinsèque : j , et non i

La réalité de la mesure

L'argument d'EPR

L'inégalité de Bell-CHSH

Deux sens du mot « réalité »

Lecture dans la théorie du grain

Synthèse

Motivation

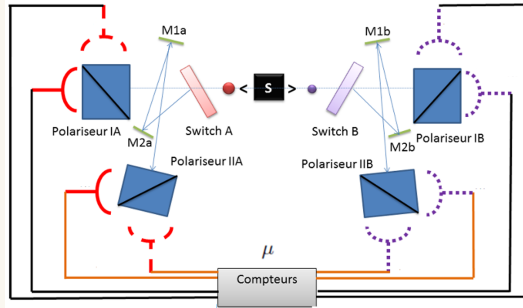


Figure 1: Expériences - J.Roger, P.Grangier, J.Dalibard, A.Aspect et al. Orsay.

Deux textes de départ

Le produit des réalités

- Le produit sur $\mathbb{R}$ de deux espaces complexes garde deux imaginaires i_1, i_2 .
- Il se scinde en un secteur où ils **coïncident** et un secteur où ils sont **conjugués**.
- Proposition : appeler « réalité » le choix d'une unité imaginaire.

Intrication de deux systèmes à deux niveaux

- Hypothèse 1 : anticorrélation parfaite selon σ_z .
- Hypothèse 2 : invariance par échange.
- Conclusion : les états de Bell $\Psi^\pm$, et le facteur $1/\sqrt{2}$.
- Une définition opératoire de la « réalité » reste à donner.

Deux difficultés, une même solution

Difficulté 1 : le sens de z n'est pas observable

Changer z en $-z$ partout ne modifie aucune probabilité. Une « réalité » attachée à ce choix doit porter sur une grandeur relative.

Difficulté 2 : l'échange sélectionne le mauvais état

L'état d'EPR-Bohm est le singulet Ψ^- , antisymétrique. L'invariance stricte par échange retient Ψ^+ . Et une anticorrélation selon une seule direction est reproduite par un mélange classique.

Solution

L'échange des facteurs est la condition de réalité de la mesure, dans le secteur conjugué $W_{\neq}$; EPR se formalise par l'anticorrélation selon deux directions incompatibles.

Rappels : le produit sur $\mathbb{R}$

Définition 1 (Propriété universelle)

Pour un anneau commutatif A et deux A -modules M_1, M_2 , le produit $M_1 \otimes_A M_2$ est muni d'une application A -bilinéaire $(x, y) \mapsto x \otimes y$ telle que toute application A -bilinéaire $f: M_1 \times M_2 \rightarrow M_3$ se factorise de façon unique par une application A -linéaire g , avec $f(x, y) = g(x \otimes y)$.

- Les tenseurs purs $x \otimes y$ engendrent l'espace, mais ne le remplissent pas : $e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2$ n'est pas pur.
- Le seul choix libre est l'anneau A : c'est lui qui décide du sort des imaginaires.

Sur $\mathbb{C}$, une seule unité imaginaire

Dans $E_1 \otimes_{\mathbb{C}} E_2$: $(\imath x) \otimes y = \imath(x \otimes y) = x \otimes (\imath y)$. Les deux imaginaires agissent de la même façon : $\imath_1 = \imath_2$.

Le produit sur $\mathbb{R}$: deux imaginaires

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe de dimension n . Sur

$$W = \mathcal{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{H} \quad (\dim_{\mathbb{R}} W = 4n^2),$$

seuls les réels traversent le produit. On dispose de

$$J_1 = \imath \otimes \text{id}, \quad J_2 = \text{id} \otimes \imath, \quad K = J_1 J_2.$$

- $J_1^2 = J_2^2 = -\text{id}$ et $J_1 J_2 = J_2 J_1$, donc $K^2 = \text{id}$.
- $J_1 \neq J_2$: deux imaginaires distincts $\imath_1, \imath_2$.
- Pour $n = 2$: $\dim_{\mathbb{R}} W = 16$, contre $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{H}) = 8$.

Nombres bicomplexes

$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$: $z = a + b\imath_1 + c\imath_2 + d\jmath$, avec $\jmath = \imath_1\imath_2$, $\jmath^2 = +1$, $\jmath \neq \pm 1$. Diviseurs de zéro : $(1 + \jmath)(1 - \jmath) = 0$. L'algèbre agit sur W par $\imath_1 \mapsto J_1$, $\imath_2 \mapsto J_2$, $\jmath \mapsto K$.

Le théorème de décomposition

Théorème 2 (*Le produit des réalités*, th. 1)

Avec $P_+ = \frac{1}{2}(\text{id} - K)$ et $P_- = \frac{1}{2}(\text{id} + K)$:

$$W = W_+ \oplus W_-, \quad W_+ = \ker(K + \text{id}), \quad W_- = \ker(K - \text{id}).$$

1. Sur W_+ : $J_2 = J_1$ (imaginaires **égaux**).
2. Sur W_- : $J_2 = -J_1$ (imaginaires **conjugués**).
3. $W_+ = \text{Im}(J_1 + J_2) \simeq \mathcal{H} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{H}$ et $W_- = \text{Im}(J_1 - J_2) \simeq \mathcal{H} \otimes_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{H}}$.

Preuve. K est une involution, donc diagonalisable de valeurs propres ± 1 . Sur W_+ , $J_1 J_2 = -\text{id}$; on compose par J_1 : $-J_2 = -J_1$. Sur W_- , $J_1 J_2 = \text{id}$ donne $J_2 = -J_1$. Le produit sur $\mathbb{C}$ est le quotient par $\text{Im}(J_1 - J_2)$, qui est W_- puisque $J_1 - J_2$ s'annule sur W_+ et vaut $2J_1$, inversible, sur W_- . $\square$

Sur un tenseur pur, et l'échange

$$P_{=}(x \otimes y) = \frac{1}{2}(x \otimes y - \imath x \otimes \imath y), \quad P_{\neq}(x \otimes y) = \frac{1}{2}(x \otimes y + \imath x \otimes \imath y).$$

- Dans $W_{=}$: $\imath x \otimes \imath y = j(x \otimes y) = -x \otimes y$: le produit complexe usuel.
- Dans $W_{\neq}$: $\imath x \otimes \imath y = +x \otimes y$.

Lemme 3 (L'échange préserve les deux secteurs)

$s(x \otimes y) = y \otimes x$ est une involution $\mathbb{R}$ -linéaire de W avec $sJ_1 = J_2s$. Donc $sK = Ks$, et s préserve $W_{=}$ et $W_{\neq}$.

Preuve. $sJ_1(x \otimes y) = y \otimes \imath x = J_2s(x \otimes y)$, puis $sJ_1J_2 = J_2J_1s$. □

Ce qui est intrinsèque : j , et
non l

Définition 4 (Orientation de phase)

Sur un espace réel V , une **orientation de phase** est un endomorphisme J avec $J^2 = -\text{id}$. Les orientations J et $-J$ sont **opposées**. Changer J en $-J$ sur $\mathcal{H}$ donne l'espace conjugué $\overline{\mathcal{H}}$, de produit scalaire $\langle x, y \rangle_{\overline{\mathcal{H}}} = \overline{\langle x, y \rangle}$.

Pourquoi ce mot

On réserve le mot « réalité » à ce qui se mesure (section 4). Le choix de $\imath$ est un **sens** : celui de la rotation de phase, comme le sens d'un quart de tour.

Le sens de i d'un système seul n'est pas observable

Proposition 5

Les observables (applications autoadjointes) de $\mathcal{H}$ et de $\overline{\mathcal{H}}$ sont les mêmes, et

$$|\langle \varphi, \psi \rangle_{\overline{\mathcal{H}}}|^2 = |\langle \varphi, \psi \rangle_{\mathcal{H}}|^2, \quad \langle \psi, A\psi \rangle_{\overline{\mathcal{H}}} = \langle \psi, A\psi \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Preuve. A commute avec J si et seulement s'il commute avec $-J$; $\overline{\langle x, Ay \rangle} = \overline{\langle Ax, y \rangle}$ équivaut à $\langle x, Ay \rangle = \langle Ax, y \rangle$. Un module est inchangé par conjugaison, et $\langle \psi, A\psi \rangle$ est réel. $\square$

Théorème de Wigner

La conjugaison complexe est une symétrie **antiunitaire** de la théorie, liée au renversement du temps : la théorie écrite avec $-i$ prédit exactement les mêmes statistiques.

Seul $j = i_1 i_2$ est intrinsèque

Proposition 6

1. Changer l'orientation des **deux** facteurs ($J_1 \mapsto -J_1$, $J_2 \mapsto -J_2$) laisse K , donc W_+ , W_- , inchangés.
2. Changer l'orientation d'**un seul** facteur change K en $-K$ et **échange** W_+ et W_- .

Preuve. $(-J_1)(-J_2) = J_1 J_2$; $(-J_1)J_2 = -K$, et $\ker(-K \pm \text{id}) = \ker(K \mp \text{id})$. □

changement	K	W_+	W_-
aucun	K	W_+	W_-
$i_1 \rightarrow -i_1$ et $i_2 \rightarrow -i_2$	K	W_+	W_-
$i_2 \rightarrow -i_2$ seul	$-K$	W_-	W_+

Ce qui a un sens est le **rapport** des deux imaginaires : même sens ($j = -1$) ou sens opposés ($j = +1$).

Quel secteur porte les états ?

- Deux systèmes décrits avec la même orientation évoluent par $e^{-iH_1 t}$ et $e^{-iH_2 t}$.
- Leur composition $e^{-i(H_1 \otimes \text{id} + \text{id} \otimes H_2)t}$ exige qu'un **même** i agisse sur les deux facteurs.
- Les états conjoints vivent donc dans $W_{\pm} \simeq \mathcal{H} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{H}$: le produit usuel de la mécanique quantique.

Une question actuelle

La nature impose-t-elle ce produit plutôt qu'un produit réel ? Renou et al. (*Nature*, 2021) : une mécanique quantique réelle à produit réel est réfutable. Hoffreumon et Woods (arXiv, 2026) : pas si l'on définit autrement l'indépendance des sources. Le débat porte exactement sur la **composition des imaginaires de deux systèmes**.

La réalité de la mesure

Le secteur conjugué est l'espace des opérateurs

Proposition 7

L'application $\mathbb{R}$ -bilinéaire $(x, y) \mapsto |x\rangle\langle y|$ induit $\Phi: W \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\mathbb{R}$ -linéaire, telle que

1. $\Phi(J_1 w) = i \Phi(w)$ et $\Phi(J_2 w) = -i \Phi(w)$;
2. $\ker \Phi = W_+$, et $\Phi|_{W_-}$ est un isomorphisme sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$;
3. $\Phi(s w) = \Phi(w)^\dagger$.

Preuve.

1. $|ix\rangle\langle y| = i|x\rangle\langle y|$; le bra est antilinéaire : $|x\rangle\langle iy| = -i|x\rangle\langle y|$.
2. $\Phi((J_1 + J_2)w) = 0$, donc $W_+ = \text{Im}(J_1 + J_2) \subset \ker \Phi$. Les $|x\rangle\langle y|$ engendrent $\mathcal{L}(\mathcal{H})$: Φ est surjective, et $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{L}(\mathcal{H}) = 2n^2 = \dim_{\mathbb{R}} W_-$.
3. $|y\rangle\langle x| = (|x\rangle\langle y|)^\dagger$.

□

Définition 8 (Réalité de la mesure)

$$\mathfrak{R} = \{ w \in W_{\neq} : s(w) = w \} :$$

les éléments du secteur conjugué **invariants par échange**. Pour ψ unitaire :

$$r_{\psi} = P_{\neq}(\psi \otimes \psi) = \frac{1}{2}(\psi \otimes \psi + \imath \psi \otimes \imath \psi) \in \mathfrak{R}.$$

- $W_{\neq}$: les deux imaginaires sont opposés, comme un ket et un bra.
- L'échange s : la condition de « réalité », $A = A^{\dagger}$.
- r_{ψ} : la trace laissée par l'état ψ dans la mesure.

Théorème 9

1. Φ envoie $\mathfrak{R}$ isomorphiquement sur $\text{Herm}(\mathcal{H})$; $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{R} = n^2$.
2. $\Phi(r_\psi) = |\psi\rangle\langle\psi|$.
3. $r_{e^{i\theta}\psi} = r_\psi$: la phase globale disparaît.
4. Règle de Born : $\text{Tr}(\Phi(r_\varphi)\Phi(r_\psi)) = |\langle\varphi|\psi\rangle|^2$.

Preuve.

1. s préserve $W_{\neq}$ et correspond à $A \mapsto A^\dagger$; ses points fixes sont les $A = A^\dagger$.
2. $\psi \otimes \psi$ est fixe par s , et $\Phi \circ P_{=} = 0$.
3. $(e^{i\theta}\psi) \otimes (e^{i\theta}\psi) = e^{i\theta J_1} e^{i\theta J_2} (\psi \otimes \psi)$, et sur $W_{\neq}$, $e^{i\theta J_2} = e^{-i\theta J_1}$.
4. $\text{Tr}(|\varphi\rangle\langle\varphi|\psi\rangle\langle\psi|) = \langle\varphi|\psi\rangle\langle\psi|\varphi\rangle$. □

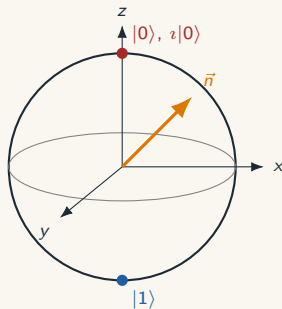
En dimension 2 : la sphère de Bloch

- $\text{Herm}(\mathbb{C}^2) = \{ t \text{id} + x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z \} :$
 $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{R} = 4.$

- Pour ψ unitaire,

$$\Phi(r_\psi) = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}(\text{id} + \vec{n} \cdot \vec{\sigma}), \quad |\vec{n}| = 1.$$

- Les états purs, vus dans la réalité de la mesure, sont les points de la **sphère de Bloch** : la phase globale a disparu.
- Exemple : $\psi = |0\rangle$ donne $\vec{n} = (0, 0, 1)$; $\psi = i|0\rangle$ donne le même point.



Les phases s'ajoutent, ou se compensent

Dans $W_{=}$ ($j = -1$)

$$P_{=}(e^{i\theta}\psi \otimes e^{i\theta}\psi) = e^{2\theta J_1} P_{=}(\psi \otimes \psi).$$

Les phases **s'ajoutent**. Pour $\theta = \pi/2$:

$$i\psi \otimes i\psi = -\psi \otimes \psi.$$



deux quarts de tour : -1

Dans $W_{\neq}$ ($j = +1$)

$$P_{\neq}(e^{i\theta}\psi \otimes e^{i\theta}\psi) = P_{\neq}(\psi \otimes \psi).$$

Les phases se **compensent**. Pour $\theta = \pi/2$:

$$i\psi \otimes i\psi = +\psi \otimes \psi.$$



aller-retour : $+1$

Où l'échange est une condition de réalité

Dans $W_{=} \simeq \mathcal{H} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{H}$

Points fixes de s : états **symétriques** (de type bosonique), comme Ψ^+ .

Le singulet vérifie $s \Psi^- = -\Psi^-$.

Dans $W_{\neq} \simeq \mathcal{L}(\mathcal{H})$

Points fixes de s : les **observables** $A = A^\dagger$, et les états sans phase $|\psi\rangle\langle\psi|$.

Conséquence

L'invariance par échange de *Intrication de deux systèmes* appartient naturellement au secteur de la **mesure** : elle exprime que ce qui est mesuré est réel. Appliquée aux états, elle exclut précisément l'état d'EPR.

Les deux secteurs en un tableau

	$W_{=}$	$W_{\neq}$
$j = \imath_1 \imath_2$	-1	$+1$
imaginaires	$\imath_2 = \imath_1$	$\imath_2 = -\imath_1$
isomorphe à	$\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{H}$ (états conjoints)	$\mathcal{L}(\mathcal{H})$ (opérateurs)
points fixes de l'échange	états symétriques	observables, $\Re$
phase $e^{\imath\theta}$ sur les deux facteurs	$e^{2\imath\theta}$	1
lecture (section 8)	demi-tour	aller-retour

L'argument d'EPR

Deux systèmes A et B , chacun dans $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$, de base $(|0\rangle, |1\rangle)$.

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle).$$

- $\sigma_z \otimes \sigma_z$ vaut -1 sur $|01\rangle, |10\rangle$ (résultats opposés) et $+1$ sur $|00\rangle, |11\rangle$.
- $\sigma_x \otimes \sigma_x$ **échange** $|01\rangle$ et $|10\rangle$:

$$(\sigma_x \otimes \sigma_x) \Psi^- = -\Psi^-, \quad (\sigma_x \otimes \sigma_x) \Psi^+ = +\Psi^+.$$

- Ψ^+ est anticorrélé selon z mais **corrélé** selon x .

Une seule direction ne suffit pas

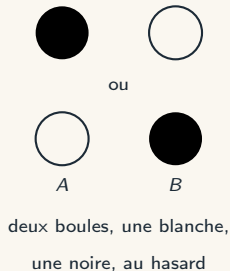
Proposition 10 (Anticorrélation classique)

Le mélange séparable

$$\rho_{cl} = \frac{1}{2}(|01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|)$$

vérifie $\text{Tr}(\rho_{cl} \sigma_z \otimes \sigma_z) = -1$, est invariant par échange,
et $\text{Tr}(\rho_{cl} \sigma_x \otimes \sigma_x) = 0$.

Preuve. $|01\rangle, |10\rangle$ sont propres pour -1 et permutés par l'échange ; $\langle 01|\sigma_x \otimes \sigma_x|01\rangle = \langle 01|10\rangle = 0$. $\square$



Ce qu'exige EPR

La prédiction certaine de **deux grandeurs incompatibles** à distance.

Théorème 11

Un état ρ (pur ou mélangé) de $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ vérifie

$$\text{Tr}(\rho \sigma_z \otimes \sigma_z) = -1 \quad \text{et} \quad \text{Tr}(\rho \sigma_x \otimes \sigma_x) = -1$$

si et seulement si $\rho = |\Psi^-\rangle\langle\Psi^-|$.

Preuve.

- Pour O de valeurs propres ± 1 et P_- le projecteur sur $E_-(O)$: $\text{Tr}(\rho O) = 1 - 2\text{Tr}(\rho P_-)$. Donc $\text{Tr}(\rho O) = -1$ si et seulement si ρ est porté par $E_-(O)$.
- $E_-(\sigma_z \otimes \sigma_z) = \text{Vect}(|01\rangle, |10\rangle)$.
- Sur ce plan, $\sigma_x \otimes \sigma_x$ échange $|01\rangle$ et $|10\rangle$: son espace propre pour -1 y est la droite $\mathbb{C}\Psi^-$.
- ρ est porté par $\mathbb{C}\Psi^-$, donc $\rho = |\Psi^-\rangle\langle\Psi^-|$. □

L'origine du facteur $1/\sqrt{2}$

Corollaire 12

Écrivons $\Psi^- = \alpha|01\rangle + \beta|10\rangle$.

- $(\sigma_x \otimes \sigma_x)\Psi^- = -\Psi^-$ impose $\beta = -\alpha$;
- la normalisation impose $2|\alpha|^2 = 1$, soit $|\alpha| = 1/\sqrt{2}$.

L'état réduit de chaque système est $\frac{1}{2}\text{id}$: l'intrication est **maximale**.

Comparaison avec le texte de départ

- Avant : anticorrélation selon z + échange $\Rightarrow \Psi^\pm$, et Ψ^+ si l'échange est strict.
- Ici : anticorrélation selon z **et** $x \Rightarrow \Psi^-$ seul, **sans hypothèse de symétrie**, et même parmi les mélanges.

Proposition 13

Pour tous a, b unitaires de $\mathbb{R}^3$, avec $\sigma_a = a_x \sigma_x + a_y \sigma_y + a_z \sigma_z$:

$$E(a, b) := \langle \Psi^- | \sigma_a \otimes \sigma_b | \Psi^- \rangle = -a \cdot b = -\cos \theta_{ab}.$$

L'anticorrélation est parfaite selon **toute** direction.

Preuve.

- Le singulet a un spin total nul : $(\sigma_a \otimes \text{id})|\Psi^-\rangle = -(\text{id} \otimes \sigma_a)|\Psi^-\rangle$.
- Donc $E(a, b) = -\langle \Psi^- | \text{id} \otimes \sigma_a \sigma_b | \Psi^- \rangle = -\text{Tr}(\frac{1}{2} \text{id} \sigma_a \sigma_b)$.
- $\text{Tr}(\sigma_a \sigma_b) = 2 a \cdot b$.

□

Définition 14 (Élément de réalité, EPR 1935)

« Si, sans perturber en aucune façon un système, on peut prédire avec certitude la valeur d'une grandeur physique, alors il existe un élément de réalité physique correspondant à cette grandeur. »

- EPR formulent l'argument avec la position et l'impulsion.
- Bohm (1951) en donne la version à spin, avec le singulet.
- Deux prémisses : le **critère de réalité** et la **localité** (une mesure sur A ne perturbe pas B).

Deux éléments de réalité incompatibles

Proposition 15

Dans Ψ^- , mesurer σ_z sur A prédit avec certitude σ_z sur B , et mesurer σ_x sur A prédit avec certitude σ_x sur B . Avec la localité, B porte des éléments de réalité pour σ_z **et** pour σ_x . Or aucun état de B ne donne une valeur certaine aux deux : $[\sigma_z, \sigma_x] \neq 0$.



EPR concluent à l'**incomplétude**. La question devient : des valeurs préexistantes et locales peuvent-elles reproduire les prédictions quantiques ?

L'inégalité de Bell–CHSH

Variables cachées locales

Hypothèse d'EPR rendue explicite : chaque paire porte une variable λ , et les résultats sont des valeurs préexistantes, fixées localement,

$$A(a, \lambda), B(b, \lambda) \in \{\pm 1\},$$

chacune ne dépendant que du réglage **local** (a pour A , b pour B).

$$E(a, b) = \int A(a, \lambda) B(b, \lambda) d\mu(\lambda).$$

Ce que reproduisent ces modèles

Les boules blanche et noire : $E(z, z) = -1$. Toute corrélation selon **une** direction. La question porte sur plusieurs directions à la fois.

Le théorème de CHSH

Théorème 16 (Clauser, Horne, Shimony, Holt, 1969)

Sous ces hypothèses, pour tous réglages a, a', b, b' ,

$$S = E(a, b) + E(a, b') + E(a', b) - E(a', b'), \quad |S| \leq 2.$$

Preuve. Pour chaque λ , avec $A = A(a, \lambda)$, $A' = A(a', \lambda)$, B, B' de même :

$$A(B + B') + A'(B - B') = \pm 2,$$

car $B, B' \in \{\pm 1\}$: l'un des deux termes $B \pm B'$ vaut 0, l'autre ± 2 . On moyenne sur λ . $\square$

L'argument utilise exactement les deux prémisses d'EPR : des valeurs **préexistantes** pour a et a' à la fois, et la **localité**.

La mécanique quantique viole l'inégalité

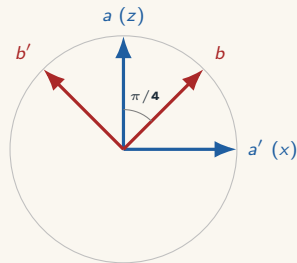
Réglages dans le plan (x, z) : $a = 0$, $a' = \pi/2$, $b = \pi/4$, $b' = -\pi/4$. Avec $E = -\cos \theta$:

- $\theta_{ab} = \theta_{ab'} = \theta_{a'b} = \pi/4$: $E = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

- $\theta_{a'b'} = 3\pi/4$: $E = +\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$S = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}.$$

$$|S| = 2\sqrt{2} \approx 2,83 > 2.$$



angles mesurés depuis z

- $2\sqrt{2}$ est le **maximum quantique** (borne de Tsirelson, 1980).
- Expériences : Aspect, Dalibard, Roger (1982), réglages changés en cours de vol ; Hensen et al. (2015), sans échappatoire.
- Résultat : $|S| > 2$, en accord avec la mécanique quantique.

Ce qui tombe

Les deux prémisses d'EPR ne peuvent être conservées **ensemble** : des valeurs préexistantes pour toutes les grandeurs, et la localité.

Deux sens du mot « réalité »

Élément de réalité et réalité de la mesure

Élément de réalité (EPR)

- Une **valeur préexistante**, attachée à chaque grandeur avant la mesure.
- Avec la localité : $|S| \leq 2$.
- **Réfuté** par l'expérience.

Réalité de la mesure ($\mathfrak{R}$)

- L'élément invariant par échange du secteur conjugué : observables, états sans phase.
- Ne postule aucune valeur préexistante.
- Fournit des statistiques **réelles** : règle de Born.

Dans ce vocabulaire : la mécanique quantique possède une **réalité de la mesure**, mais pas d'**éléments de réalité locaux** au sens d'EPR.

Lecture dans la théorie du grain

Demi-tour et aller-retour

Interprétation proposée ; elle n'est pas démontrée par ce qui précède.

Dans *Plan complexe et grain nul*, $\imath$ est le quart de tour normé $\hat{\imath}$, et le demi-tour a deux racines carrées : le quart de tour et l'aller-retour en résolution.

$$W_{=}, j = -1$$

Deux quarts de tour de même sens font un **demi-tour**. Les phases s'ajoutent : secteur des états conjoints, où vit l'intrication.

$$W_{\neq}, j = +1$$

Un quart de tour puis son inverse font un **aller-retour**, qui rend l'identité. Les phases se compensent : secteur de la mesure.

La règle de Born comme aller-retour

$\psi\bar{\psi} = |\psi|^2$ est la trace de l'aller-retour, comme chez Cramer et chez Aharonov–Bergmann–Lebowitz : une onde « retour » conjuguée rejoint l'onde « aller ».

Phase globale et questions ouvertes

Phase globale et promotion

Le théorème de la réalité de la mesure (point 3) dit que la mesure ne voit pas le quart de tour global. Cela correspond à la restauration à la promotion de *Mouvement de rotation intrinsèque* : les quatre états de la grille sont distincts, la mesure ne les distingue pas.

Questions ouvertes

1. Le singulet a un spin total nul : ses composantes s'annulent en moyenne selon toute direction. Lien précis avec la **croix orientée**, orbite de $\hat{i}$ de somme exactement nulle ? Pour l'instant, une analogie.
2. Dans une lecture à deux résolutions, les deux facteurs pourraient porter des grains δ_f et δ_g . Le secteur de la mesure réalise-t-il le passage du grossier au fin de *Du monde du grain au monde expérimental* ?

Synthèse

Ce qui est démontré

- Le sens de ι d'un système seul n'est pas observable ; seul le rapport $j = \iota_1 \iota_2$ est intrinsèque.
- $W_{\neq}$ est canoniquement l'espace des opérateurs ; l'échange y découpe les observables. La **réalité de la mesure** $\mathfrak{R}$ contient les états sans phase et porte la règle de Born.
- L'invariance par échange est une condition sur la **mesure**, non sur l'état d'EPR, qu'elle exclut.
- Le singulet est l'unique état, même mélangé, anticorrélé selon z et x ; le facteur $1/\sqrt{2}$ en découle.
- EPR : deux éléments de réalité incompatibles. Bell-CHSH : $|S| \leq 2$ pour des valeurs locales préexistantes, $2\sqrt{2}$ pour le singulet, confirmé par l'expérience.

Ce qui est proposé

$j = -1$ comme demi-tour, $j = +1$ comme aller-retour ; le lien entre réalité de la mesure et promotion reste à développer.

- H. Genz, *Le produit des réalités ; Intrication de deux systèmes à deux niveaux ; Réalité de la mesure et formalisation d'EPR ; Plan complexe et grain nul ; Mouvement de rotation intrinsèque*, manuscrits, 2026.
- A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, *Phys. Rev.* 47 (1935), 777–780.
- D. Bohm, *Quantum Theory*, Prentice-Hall, 1951.
- J. S. Bell, *Physics* 1 (1964), 195–200.
- J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, R. A. Holt, *Phys. Rev. Lett.* 23 (1969), 880–884.
- B. S. Cirel'son, *Lett. Math. Phys.* 4 (1980), 93–100.
- A. Aspect, J. Dalibard, G. Roger, *Phys. Rev. Lett.* 49 (1982), 1804–1807.
- B. Hensen et al., *Nature* 526 (2015), 682–686.
- E. P. Wigner, *Group Theory and its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra*, Academic Press, 1959.
- M.-O. Renou et al., *Nature* 600 (2021), 625–629.
- T. Hoffreumon, M. P. Woods, arXiv:2603.19208, 2026.
- J. G. Cramer, *Rev. Mod. Phys.* 58 (1986), 647–687.
- Y. Aharonov, P. G. Bergmann, J. L. Lebowitz, *Phys. Rev.* 134 (1964), B1410–B1416.