

La force sans Noether

La relation fondamentale de la dynamique comme brisure de la symétrie d'inertie

d'après H. Genvrin

Octobre 2026

De quoi parle ce cours

Deux façons de faire **émerger la force**, du plus élémentaire au plus général :

- 1 la **voie affine** — la force comme écart à la ligne droite, sans aucun théorème de conservation ;
- 2 la **voie de Noether** — la force comme brisure d'une symétrie, qui donne à la première sa portée universelle.

Fil conducteur : *une force est ce qui apparaît quand une symétrie d'inertie se rompt.*

Objectif

Comprendre *d'où* sort la force, et pourquoi la relation fondamentale de la dynamique (RFD) $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$ n'est pas un axiome tombé du ciel, mais la **mesure d'un écart à l'inertie** — sans circularité.

- 1 Le problème et l'idée directrice
- 2 Prérequis : « droite », connexion, dérivée covariante
- 3 La voie affine : la force comme défaut de géodésie
- 4 La voie de Noether : brisure de symétrie
- 5 Les deux voies s'enchaînent

- 1 Le problème et l'idée directrice
- 2 Prérequis : « droite », connexion, dérivée covariante
- 3 La voie affine : la force comme défaut de géodésie
- 4 La voie de Noether : brisure de symétrie
- 5 Les deux voies s'enchaînent

Le risque de circularité

La tentation naïve :

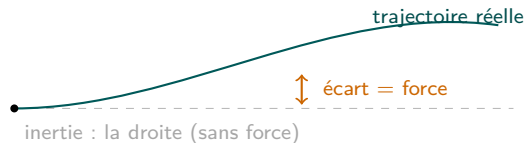
- définir la **force** par l'accélération ($F = m\ddot{y}$) ;
- puis « expliquer » l'accélération par la force.

Le cercle

Force $\Rightarrow$ accélération $\Rightarrow$ force $\Rightarrow \dots$ On tourne en rond.

La sortie : définir l'**inertie d'abord**, *sans parler de force* — comme une notion purement géométrique (« la ligne droite »). La force devient alors l'**écart** à cette inertie. Le cercle est brisé.

L'idée en une image



- Sans force : le système suit la **droite** (l'inertie).
- Une force = ce qui **écarte** la trajectoire de cette droite.
- Toute la difficulté est de dire proprement ce qu'est « la droite ». C'est l'objet de la **géométrie affine**.

- 1 Le problème et l'idée directrice
- 2 Prérequis : « droite », connexion, dérivée covariante
- 3 La voie affine : la force comme défaut de géodésie
- 4 La voie de Noether : brisure de symétrie
- 5 Les deux voies s'enchaînent

Qu'est-ce qu'une « droite » ? La géométrie affine

On n'a besoin ni de longueurs ni d'angles pour parler de **droites** et de **parallèles** : c'est le niveau *affine* (cf. programme d'Erlangen).

$$\text{Aff}(n) \supsetneq \text{Sim}(n) \supsetneq \text{Isom}(n).$$

- **Affine** : alignement, parallélisme, milieux. (pas d'angle, pas de longueur)
- **Similitude** : on ajoute les angles.
- **Métrique** : on ajoute les longueurs.

Pour l'inertie

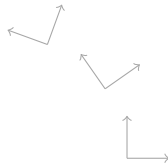
Il suffit du niveau **affine** : « inertie = aller tout droit ». Une *connexion* va coder ce que « tout droit » veut dire.

Le problème : comparer des vecteurs en deux points

On veut dire « ma vitesse ne change pas ». Naïvement : $\frac{d\dot{y}}{dt} = 0$.

Le piège

Comparer $\dot{y}$ à deux instants suppose de comparer des vecteurs situés en **deux points différents**. En coordonnées courbes (polaires, repère tournant), les **axes locaux tournent** avec la position : « mêmes composantes » n'y veut pas dire « même vecteur ».



les axes locaux changent d'orientation selon le point

Il faut une règle pour **transporter** un vecteur d'un point à l'autre.

Definition 1 (Connexion)

Une **connexion** ∇ est la règle de *transport parallèle* : elle dit quels vecteurs en des points voisins comptent comme « de même direction ».

On lit $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$ comme :

∇
dérivée corrigée
de la déformation des axes

$\dot{\gamma}$
dans la direction
où l'on avance

$\dot{\gamma}$
du vecteur
dérivé : la vitesse

C'est la **dérivée covariante** : la « vraie » variation d'un vecteur, indépendante du système d'axes.

Les symboles de Christoffel Γ

On note $e_1, \dots, e_n$ les vecteurs de base des axes. « De combien les axes tournent et s'étirent » se chiffre en dérivant une base par rapport à une autre :

$$\nabla_{e_k} e_j = \Gamma_{jk}^i e_i \quad (\text{somme sur } i).$$

- Γ_{jk}^i : « en avançant selon k , quelle part de la composante j se déverse dans la composante i , du seul fait que les axes bougent ».
- **Convention d'Einstein** : un indice répété (haut/bas) est sommé : $\Gamma_{jk}^i \dot{y}^j \dot{y}^k = \sum_{j,k} \Gamma_{jk}^i \dot{y}^j \dot{y}^k$.
- Axes rectilignes fixes $\Rightarrow \Gamma = 0$.

- 1 Le problème et l'idée directrice
- 2 Prérequis : « droite », connexion, dérivée covariante
- 3 La voie affine : la force comme défaut de géodésie**
- 4 La voie de Noether : brisure de symétrie
- 5 Les deux voies s'enchaînent

Definition 2 (Inertie)

Un mouvement est **inertiel** si sa vitesse est transportée parallèlement le long d'elle-même — la trajectoire « la plus droite possible » :

$$\nabla_{\dot{y}} \dot{y} = 0, \quad \text{soit} \quad \ddot{y}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{y}^j \dot{y}^k = 0.$$

- En **coordonnées inertielles** ($\Gamma = 0$) : simplement $\ddot{y} = 0$.
- Aucune longueur, aucun angle : « droit » est un invariant **affine**.
- Ceci définit l'inertie **sans jamais parler de force**.

D'où vient la décomposition (règle du produit)

La vitesse dans la base : $\dot{y} = \dot{y}^j e_j$ (nombres $\dot{y}^j$, vecteurs e_j qui bougent). On dérive avec Leibniz :

$$\nabla_{\dot{y}} \dot{y} = \nabla_{\dot{y}} (\dot{y}^j e_j) = \underbrace{\ddot{y}^j e_j}_{\text{le nombre varie}} + \underbrace{\dot{y}^j \nabla_{\dot{y}} e_j}_{\text{la base varie}} .$$

Or $\nabla_{\dot{y}} e_j = \dot{y}^k \nabla_{e_k} e_j = \dot{y}^k \Gamma_{jk}^i e_i$. En regroupant sur e_i :

$$(\nabla_{\dot{y}} \dot{y})^i = \ddot{y}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{y}^j \dot{y}^k$$

- **Première part** : les composantes de la vitesse changent.
- **Seconde part** : les axes changent — chiffrée par les Γ .

La force comme défaut de géodésie

Definition 3 (Force)

$$\mathbf{F} := m \nabla_{\dot{y}} \dot{y} \quad (\text{en coord. inertielles : } \mathbf{F} = m \ddot{y}).$$

Proposition

$$\mathbf{F} = 0 \iff \nabla_{\dot{y}} \dot{y} = 0 \iff \text{le mouvement est inertiel (géodésique)}.$$

On retrouve la RFD

$$\text{Avec } \mathbf{p} = m\dot{y} : \quad \dot{\mathbf{p}} = m\ddot{y} = m \nabla_{\dot{y}} \dot{y} = \mathbf{F}.$$

La force a émergé sans groupe, sans lagrangien, sans Noether : c'est l'écart à la ligne d'univers droite.

Le bonus : forces fictives = termes de connexion

En coordonnées *non* inertielles, un mouvement inertiel obéit à

$$\ddot{y}^i = -\Gamma_{jk}^i \dot{y}^j \dot{y}^k.$$

L'accélération *apparente* porte des termes qui ressemblent à des forces.

Référentiel tournant (Ω)

$$\mathbf{F}_{\text{fict}} = -m \left(\underbrace{2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}'}_{\text{Coriolis}} + \underbrace{\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}')}_{\text{centrifuge}} \right)$$

Ces « forces » ne sont pas des interactions : ce sont des Γ déguisés, nuls en repère inertiel. **La voie affine les explique du premier coup.**

- 1 Le problème et l'idée directrice
- 2 Prérequis : « droite », connexion, dérivée covariante
- 3 La voie affine : la force comme défaut de géodésie
- 4 La voie de Noether : brisure de symétrie**
- 5 Les deux voies s'enchaînent

Inertie = symétrie ; force = brisure

Les mouvements inertiels sont les **orbites** du groupe de Galilée Gal (translations, rotations, changements de référentiel). Dans le cadre de Klein :

$$F_s = \Delta\mu \quad (\text{écart mesuré à l'invariance}), \quad F_s = 0 \iff \text{équilibre}.$$

Lecture

« Quitter la géodésique » = « quitter l'invariant » = **briser la symétrie d'inertie**. La force mesure cet écart.

Cette lecture est **déjà présente** dans la voie affine (les géodésiques *sont* les orbites de Gal). Noether va seulement *nommer* la charge et *généraliser*.

Le générateur H et le crochet de Poisson

- Le **hamiltonien** $H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(y)$ engendre la dynamique.
- Le **crochet de Poisson** transforme un générateur en taux de variation : $\dot{f} = \{f, H\}$.

Caractérisation (sur le moment)

$$\dot{\mathbf{p}} = \{\mathbf{p}, H\} = -\frac{\partial V}{\partial y} = F, \quad \{y, H\} = \dot{y}.$$

Donc $\dot{\mathbf{p}} = \{\mathbf{p}, H\} = 0 \iff$ pas de force $\iff$ inertie.

Attention : c'est le *moment* $\mathbf{p}$ qui est conservé (pas la position : $\{y, H\} = \dot{y} \neq 0$, ça bouge !).

Noether en une ligne : l'antisymétrie

$$\{q_X, H\} = -\{H, q_X\}.$$

- « q_X conservée » : $\{q_X, H\} = 0$.
- « H invariant sous le flot de q_X » : $\{H, q_X\} = 0$.
- Par antisymétrie : **la même équation**.

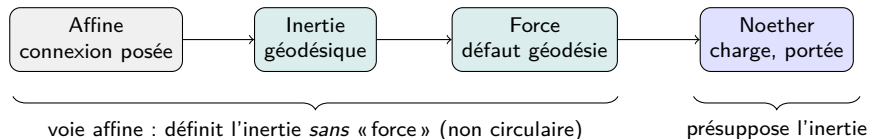
Théorème de Noether (forme minimale)

Une quantité est **conservée** $\iff$ la symétrie qu'elle engendre **préserve** H .

D'où la **RFD généralisée** : $F_s = \dot{\mathbf{q}} = \{q_X, H\}$, nulle sur le groupe principal, non nulle dès qu'on le quitte.

- 1 Le problème et l'idée directrice
- 2 Prérequis : « droite », connexion, dérivée covariante
- 3 La voie affine : la force comme défaut de géodésie
- 4 La voie de Noether : brisure de symétrie
- 5 Les deux voies s'enchaînent

Comment les deux voies s'articulent



- La voie affine est **logiquement première** : elle définit l'inertie que Noether **présuppose**.
- Noether n'ajoute que deux choses : *nommer* la charge (le moment) et *généraliser* au-delà de la mécanique.

Ce que chaque voie donne — et ne donne pas

Voie	Machinerie	Ce qu'elle donne
Sémantique $F_s = \Delta\mu$	mesure, invariant	force = brisure (formel)
Affine	connexion plate	$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{y}}$ (mécanique)
Noether	générateur, crochet	$\mathbf{q}$ charge quelconque (universel)

Portée et honnêteté

La voie affine reste **mécanique** et **attachée à la masse** : elle n'identifie aucune charge comme *principe* et ne généralise pas. C'est exactement l'**apport de Noether** : donner à « $\mathbf{q}$ peut être n'importe quelle charge, sans masse » sa portée universelle.

Résidu honnête : ce qu'on présuppose toujours

- La voie affine ne crée pas l'inertie *ex nihilo* : elle **pose** la connexion plate — c'est la première loi de Newton érigée en axiome structurel.
- Elle **déplace** le présupposé (« il existe une structure affine plate »), elle ne l'*élimine* pas.
- Aucune des deux voies ne donne le **contenu dynamique** (*quelles* forces existent) : cela reste un apport indépendant — le potentiel V , la loi de force.

En une phrase

On se passe de Noether pour **faire naître** la force ; on ne s'en passe pas pour lui donner sa **portée universelle**.

L'**inertie** est ce que la géométrie affine appelle « droit » ;
la **force** est ce qui apparaît quand on s'en écarte.

Merci — questions et objections bienvenues.