

Le plan complexe animé d'un mouvement de rotation intrinsèque

Quatre états, deux résolutions et l'hélice des niveaux — cours

Hugues Genvrin

Octobre 2026

Présentation du cours

L'image de départ

Le plan complexe tourne sur lui-même comme une toupie, par pas d'un quart de tour, en quatre étapes, autour du pivot 0.

L'objection Ce qui est décrit est une symétrie, pas un mouvement : le plan tourné est le même plan, et le plan réel a une symétrie de même forme.

Ce que la théorie du grain apporte

1. un i extrait du plan lui-même, qui agit sur l'espace entier ;
2. des états discernables : quatre grilles distinctes, et non quatre étiquetages ;
3. un paramètre : le niveau de résolution, parcouru par $\omega = 2^n i$.

Résultat : un mouvement de rotation intrinsèque, dont la promotion ne garde que la symétrie.

La note d'origine

Des états discernables

Le paramètre : le niveau de résolution

À la promotion

Pourquoi pas « spin »

Synthèse

La note d'origine

Le groupe et ses quatre états

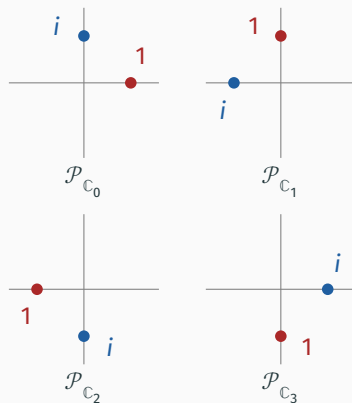
Le quart de tour R de centre 0 est la multiplication par i :

$$G = \langle i \rangle = \{\text{Id}, i, i^2, i^3\} \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}.$$

Un **état** est le plan muni d'un repère étiqueté (1 et i marqués) :

$$\mathcal{P}_{\mathbb{C}_k} = i^k \mathcal{P}_{\mathbb{C}}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Convention active : on fait tourner le repère. La note réétiquette les points fixes (convention passive) : $k \leftrightarrow -k$, sans effet sur les énoncés.



Les énoncés de la note

Proposition 1 (Énoncés de la note)

1. G agit sur les quatre états de façon **simplement transitive** : pour deux états, une unique rotation envoie l'un sur l'autre.
2. 0 est l'unique point fixe commun des rotations non triviales : le **pivot**.
3. $1 + i + i^2 + i^3 = 0$: le **barycentre** de l'orbite de 1 est le pivot.

Preuve.

1. $i^j \mathcal{P}_{\mathbb{C}_k} = \mathcal{P}_{\mathbb{C}_{j+k}}$ (indices modulo 4) ; la rotation de $\mathcal{P}_{\mathbb{C}_k}$ vers $\mathcal{P}_{\mathbb{C}_\ell}$ est $i^{\ell-k}$, et elle seule.
2. $i^k z = z$ avec $i^k \neq 1$ impose $z = 0$.
3. $1 + i - 1 - i = 0$. □

Le point 1 renforce la transitivité de la note : chaque position de la toupie est atteinte par **une** rotation et une seule (« torseur »).

L'extraction de i

Les quatre points unités s'écrivent indifféremment

$$(1, i, -1, -i) \quad \text{ou} \quad (i^4, i, i^2, i^3).$$

La seconde écriture fait apparaître, **implicitement**, un élément i dont les quatre points sont les puissances. Cette extraction n'est pas forcée, mais elle est **disponible**, parce que le plan complexe porte une multiplication.

Proposition 2 (Extraction de i)

1. $\{1, i, -1, -i\}$ est le groupe cyclique d'ordre 4 : l'orbite de 1 sous la multiplication par i .
2. Il a deux générateurs, i et $i^3 = -i$: l'élément extrait est fixé **à l'orientation près**.
3. Le **point** i définit $z \mapsto iz$ sur le plan **entier** : une rotation, qui fixe 0 et conserve les distances.

Un point qui agit sur tout le plan

- Dans $\mathbb{C}$, chaque point z est aussi une **opération** : la multiplication par z .
- Le point i , pris sur un demi-axe, devient une **transformation globale de l'espace**, qui emporte tous les points, et pas seulement les quatre dont on l'a extrait.
- C'est en ce sens précis que la rotation est **intrinsèque** : elle est tirée du plan lui-même.

Ce que le plan réel n'a pas

$\mathbb{R}^2$ a les mêmes quatre points unités, mais pas de multiplication qui en fasse des opérations : le point $(0, 1)$ n'agit sur rien. Le quart de tour $R(x, y) = (-y, x)$ doit y être **ajouté** de l'extérieur, comme une matrice. Dans $\mathbb{C}$, il est **extrait** des points eux-mêmes.

Ce qui manque encore pour un mouvement

Proposition 3 (Dans le cadre usuel, une symétrie intrinsèque)

1. Les quatre états ont le même ensemble : $i^k \mathbb{C} = \mathbb{C}$. Ils ne diffèrent que par leurs étiquettes.
2. $\mathbb{R}^2$, muni de R ajouté de l'extérieur, satisfait les mêmes énoncés.

Preuve. $i \cdot$ est une bijection de $\mathbb{C}$; $R^4 = \text{Id}$, $R^2 = -\text{Id}$, et $(1, 0) + (0, 1) + (-1, 0) + (0, -1) = 0$. $\square$

Pour parler de mouvement, il manque :

1. des états discernables autrement que par leurs étiquettes (section 2) ;
2. un paramètre le long duquel ils se succèdent (section 3).

Des états discernables

Le quart de tour échange les grains

Lecture à deux résolutions : axe horizontal au grain fin δ_f , axe vertical au grain grossier $\delta_g = 2^n \delta_f$; deux niveaux **congruents**.

$$\Pi(\delta_1, \delta_2) = \delta_1 \tilde{\mathbb{Z}} + i \delta_2 \tilde{\mathbb{Z}}, \quad \Gamma = \Pi(\delta_f, \delta_g).$$

Définition 4 (États de grille)

Γ_k est la grille $R^k(\Gamma)$ munie du repère étiqueté tourné de k quarts de tour.

Proposition 5 (Les grilles alternent)

$$R(\Gamma) = \Pi(\delta_g, \delta_f) \neq \Gamma, \quad R^2(\Gamma) = \Gamma.$$

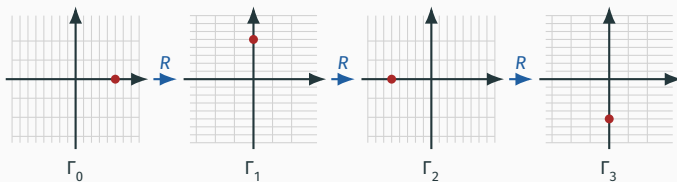
Preuve. $R(m\delta_f + i n\delta_g) = -n\delta_g + i m\delta_f$. Le point δ_f est dans Γ mais pas dans $\Pi(\delta_g, \delta_f)$, car $\delta_f \notin \delta_g \tilde{\mathbb{Z}}$. Enfin $R^2 = -\text{Id}$ et $-\Gamma = \Gamma$. □

Quatre états discernables

Théorème 6

Les quatre états $\Gamma_0, \dots, \Gamma_3$ sont deux à deux distincts, et G agit sur eux de façon simplement transitive. Chaque état est caractérisé par :

- la **position des niveaux** (quel axe porte le grain fin) : k modulo 2 ;
- l'**orientation** du repère, qui distingue k de $k + 2$.



fin horizontal → fin vertical → fin horizontal (retourné) → fin vertical (retourné)

Le cycle : un échange et un retournement

- Un quart de tour **échange les niveaux** entre les deux axes.
- Deux quarts de tour ramènent la même répartition des niveaux, mais **retournent** l'orientation.
- C'est la structure de l'échange J de *Plan complexe et grain nul* (prop. 28) : un aller-retour entre les deux niveaux, dont le carré est le demi-tour $-\text{Id}$, le signe venant du retournement de la superposition.

Pourquoi quatre, et non deux

Sans étiquettes, il ne reste que $\Pi(\delta_f, \delta_g)$ et $\Pi(\delta_g, \delta_f)$: un va-et-vient. Mais $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ n'est pas un produit de deux groupes d'ordre 2 : le retournement est le **carré** de l'échange. C'est ce qui fait du cycle une rotation, et non une suite de deux symétries.

La brisure de symétrie rend le mouvement visible

Plan réel

Le quart de tour est une **symétrie** de la grille carrée : les états successifs ont la même grille. Le mouvement est **invisible**.

Lecture à deux résolutions

Le quart de tour n'est **pas** une symétrie de la grille rectangulaire : les états sont discernables. Le mouvement est **visible**.

Le mouvement de rotation intrinsèque est la **face positive** de la symétrie brisée au niveau des grains.

Le paramètre : le niveau de
résolution

Une échelle de strates adjacentes

Posons $a = 2^{n_\infty}$ et, pour $m \in \tilde{\mathbb{Z}}$, $L_m = a^m \delta_f : L_0 = \delta_f, L_1 = \delta_g$. Deux strates consécutives sont congruentes, de rapport a .

$\Gamma = \Pi(L_0, L_1)$ occupe la **fenêtre** des strates adjacentes $(0, 1)$. L'opérateur $\omega = a i$ fait un quart de tour et multiplie les longueurs par a .

Théorème 7 (L'hélice des états)

Pour tout $j \in \tilde{\mathbb{Z}}$,

$$\omega^j \Gamma = \begin{cases} \Pi(L_j, L_{j+1}) & j \text{ pair,} \\ \Pi(L_{j+1}, L_j) & j \text{ impair,} \end{cases}$$

avec le repère de $\Gamma_{j \bmod 4}$ dilaté par a^j . L'état j a une **hauteur** (la fenêtre $(j, j+1)$) et une **phase** (j modulo 4).

Preuve. $\omega^j \Gamma = R^j(a^j \Gamma)$ et $a^j \Gamma = \Pi(L_j, L_{j+1})$; R^j échange les pas si et seulement si j est impair. □

Le mouvement ne se referme pas

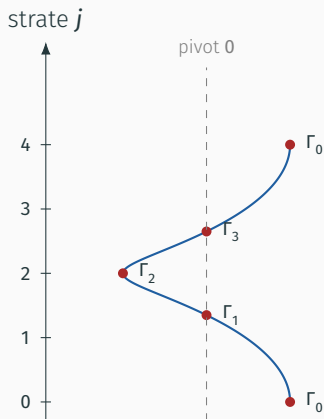
Corollaire 8

$j \mapsto \omega^j \Gamma$ est injective : deux états d'indices différents sont différents, même de même phase. La **phase** est périodique de période 4 ; la **hauteur** ne revient jamais.

Preuve. Les fenêtres $(j, j+1)$ et $(j', j'+1)$ diffèrent si $j \neq j'$, les L_m étant distincts ($a \neq 1$). $\square$

j	ω^j	fenêtre	grain fin	étiquette 1	phase
0	1	(0,1)	horizontal	1	Γ_0
1	$a i$	(1,2)	vertical	$a i$	Γ_1
2	$-a^2$	(2,3)	horizontal	$-a^2$	Γ_2
3	$-a^3 i$	(3,4)	vertical	$-a^3 i$	Γ_3
4	a^4	(4,5)	horizontal	a^4	Γ_0

L'hélice des états



phase : $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ (un tour en 4 pas)

hauteur : $\tilde{\mathbb{Z}}$ (ne revient jamais)

pas : une strate (n_∞ niveaux de résolution) par quart de tour

À chaque pas : un quart de tour autour du pivot et une strate. Après un tour complet, la phase de départ, quatre strates plus haut.

Le mouvement de rotation intrinsèque

Théorème 9 (Mouvement de rotation intrinsèque)

L'espace du grain, pris dans deux strates adjacentes, est animé d'un mouvement de rotation intrinsèque dont le paramètre est le niveau de résolution :

1. à chaque passage d'une strate à la suivante, il tourne d'un quart de tour autour du pivot 0 , et le grain fin change d'axe ;
2. les états successifs sont discernables par leur grille, et non seulement par leurs étiquettes ;
3. la phase a la période 4 de la note ; la hauteur ne revient jamais ;
4. le sens est fixé par le choix de i ou de $-i$.

Le sens de rotation est un choix

La conjugaison $z \mapsto \bar{z}$ laisse Γ invariante et échange les hélices de ω et de $\bar{\omega} = -a i$: le sens est une chiralité, fixée par un choix.

Le pivot et le barycentre

Proposition 10 (Équilibre de la toupie)

1. Le pivot 0 est l'unique point fixe de ω et de ses puissances non nulles.
2. Les **phases** s'équilibrent : $\sum_{j=0}^3 \omega^j / |\omega^j| = 1 + i + i^2 + i^3 = 0$.
3. Les **positions** ne s'équilibrent pas : $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 = (1 - a^2)(1 + ai) \neq 0$.

Preuve.

1. $\omega^j z = z$, $\omega^j \neq 1$ car $|\omega^j| = a^j \neq 1$.
2. $\omega^j / |\omega^j| = i^j$.
3. $1 + ai - a^2 - a^3i = (1 - a^2) + ai(1 - a^2)$. □

La toupie de la note est équilibrée **en phase**, déséquilibrée **en hauteur**. Le barycentre nul de la note est celui de la phase.

À la promotion

Le mouvement redevient une symétrie

Théorème 11 (Restauration)

1. Les jonctions limitées de chacune des grilles $\Gamma_0, \dots, \Gamma_3$ ont pour promotion $\mathbb{C}$ tout entier : les quatre états ont la même image.
2. Sur $\mathbb{C}$, $\text{st}(iz) = i \text{st}(z)$: on retrouve exactement la symétrie de la note.
3. L'hélice n'a pas d'image limitée : $|\omega^j| = a^j$. Seule sa phase i^j passe à la promotion.

Preuve. Les deux pas étant infinitésimaux, tout complexe standard est infiniment proche d'une jonction de chaque grille ; st est multiplicative sur les limites ; a^j est illimité pour $j \geq 1$. □

Le schéma de la théorie du grain

Une structure nette au niveau des grains (un mouvement, des états, une hauteur), dont la promotion ne garde que l'ombre (une symétrie d'ordre 4). La note décrivait l'ombre ; la théorie du grain en donne l'objet.

Symétrie et mouvement

	cadre usuel / promotion	théorie du grain
les quatre états	un même plan, quatre étiquetages	quatre grilles discernables
le quart de tour	une symétrie	échange les niveaux entre les axes
origine de la rotation	extraite des points de $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}^2$: ajoutée)	idem
paramètre	aucun	le niveau de résolution
orbite	cycle d'ordre 4	hélice : phase d'ordre 4, hauteur sans retour
barycentre	0	0 en phase, non nul en position

Pourquoi pas « spin »

Pourquoi ne pas parler de spin

1. **Le spin n'est pas la rotation de l'espace.** Il décrit comment un **objet** se transforme quand on tourne l'espace ; un espace entièrement en rotation ne se distingue pas d'un repère tournant.
2. **La phase revient après un tour.** Le spin $\frac{1}{2}$ change de signe après un tour et revient après deux. Ici $i^4 = 1$: comportement de **vecteur**, non de spineur. Le choix du sens évoque plutôt une **hélicité**.

Une piste : la hauteur compte les tours

Sur l'hélice, un tour complet ne ramène pas au même état : la hauteur a monté de quatre strates. Le niveau **enregistre le nombre de tours**. C'est la structure du **revêtement universel** du groupe des rotations du plan, qui permet, en physique des systèmes plans, des rotations non entières (anyons).

Synthèse

Ce qui est établi

- Les énoncés de la note sont exacts ; l'action est même **simplement transitive**.
- i est **extrait** des quatre demi-axes et agit sur l'espace entier : la symétrie est intrinsèque à $\mathbb{C}$.
- Dans la lecture à deux résolutions, les quatre états sont **quatre grilles discernables** : échange des niveaux, puis retournement.
- Le **niveau de résolution** est le paramètre : l'orbite de ω est une hélice, de phase périodique et de hauteur sans retour.
- À la promotion, le mouvement redevient la symétrie de la note.

L'espace du grain, pris dans deux strates adjacentes, est animé d'un mouvement de rotation intrinsèque, dont le paramètre est le niveau de résolution.

1. **Mouvement plus fin.** ω saute d'une strate à la suivante, mais entre deux strates il y a n_∞ niveaux de résolution, que le flot 2^p parcourt un à un. Peut-on paramétrer l'hélice par ces niveaux, et obtenir une rotation de $\frac{\pi}{2n_\infty}$ par niveau ?
2. **Spineurs.** Un objet qui change de signe après un tour complet de l'hélice et ne revient qu'après deux ?
3. **Dimension supérieure.** Avec trois axes et trois niveaux congruents, quelles rotations intrinsèques, et retrouve-t-on les quaternions ?

- H. Genvrin, *Le plan complexe animé d'un mouvement de rotation intrinsèque*, note, mars 2026, et article, septembre 2026.
- H. Genvrin, *Théorie du grain*, manuscrit, 2026.
- H. Genvrin, *Du cercle complexe au plan complexe : deux axes, deux résolutions*, manuscrit, 2026.
- H. Genvrin, *Plan complexe et grain nul*, manuscrit, 2026.
- H. Genvrin, *Niveau d'observation*, manuscrit, 2026.