

Les jauges

Une alternative relationnelle au calcul vectoriel

Hugues Genvrin

2014 – Théorie + Applications

Plan

- 1 Motivation
- 2 Formalisation algébrique
- 3 Portabilité du jaugeage
- 4 Stratification
- 5 Application : déformation moléculaire
- 6 Application : boucle adaptative
- 7 Bilan

L'idée directrice

Substituer un *ancêtre* aux structures vectorielles

Les espaces vectoriels supposent une hiérarchie lourde (groupes, corps, bases) et figent le temps et l'espace comme *absolus*, source de complexité différentielle évitable.

- Une **jauge** repart du plus primitif : ordonner et identifier.
- Briques de base : une *relation d'ordre* et une *relation d'équivalence* — rien de plus.
- Posture épistémologique : *Archimède* (pragmatisme) contre l'universalité réductionniste.

Fil conducteur

Du temps circadien (biologie) au photon (physique), une même grille : *qu'est-ce qui ordonne, qu'est-ce qui équivaut ?*

Ordre générique et stricte

Definition 1 (Ordre générique)

$\mathcal{O} = (\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ est un pré-ordre *antisymétrique générique* :

$$(x \mathcal{O}_1 y) \wedge (y \mathcal{O}_1 x) \Leftrightarrow x \mathcal{R} y,$$

où $\mathcal{R}$ (symétrique) consigne la *non-ordonnabilité*.

Definition 2 (Ordre stricte)

On appelle ordre stricte le complémentaire de l'ordre générique $\mathcal{O}$, que l'on note $\overline{\mathcal{O}}$.

On remarque que le complémentaire de l'ordre stricte est un ordre générique.

Jauge

Definition 3 (Jauge)

Sur $F \subset E$, le couple $\mathcal{J}_F(\mathcal{O}, \mathcal{R})$ tel que

$$(x \overline{\mathcal{O}} y \wedge y \overline{\mathcal{O}} x) \Leftrightarrow x \mathcal{R} y.$$

Notation clé (pré-ordre total)

$x \preceq y : \Leftrightarrow (x \mathcal{O}_1 y) \vee (x \mathcal{R} y)$. $\mathcal{R}$ = partie symétrique, $\mathcal{O}_1$ = partie asymétrique. La propriété de jauge $\equiv$ « $\preceq$ est total ».

Trois portées de jauge

Absolue

$F = E$: la jauge couvre tout son ensemble natif.

Universelle

Absolue *et* de capacité relativement à tous les E_j .

De capacité

$F \subset E, F' \subset E'$ avec $E \cap E' = \emptyset$: une jauge de F jauge *aussi* F' .

Comparer les jauges : sphère et finesse

- **Compatibilité** : un morphisme α exprime les éléments d'un ensemble dans l'autre. Une *sphère* $\mathcal{S}$ réunit des ensembles compatibles.
- **Finesse** : $\mathcal{J}_i$ plus fine que $\mathcal{J}_k$ si elle ordonne davantage —

$$\#o(\widehat{E_k, \mathcal{J}_i}) \geq \#o(\widehat{E_k, \mathcal{J}_k}),$$

stricte en jaugeage *hétérogène*, égale en *homogène* (isofines si sur toute la sphère).

Ordre $\mathcal{O}_\delta$ sur les jauges

« plus fine que » est une relation d'ordre (antisymétrique + transitive) sur la sphère : les jauges se hiérarchisent.

Morphisme de jauges (sans bijectivité)

Definition 4 (Morphisme)

$\alpha : E \rightarrow E'$ préserve le pré-ordre : $x \preceq y \Rightarrow \alpha(x) \preceq' \alpha(y)$.

- Préserve l'équivalence ; peut *effondrer* un strict en équivalence.
- **Ni injectivité ni surjectivité** requises — c'est ce relâchement qui donne du contenu aux théorèmes.

Le piège évité

« Morphisme = bijection » rendrait l'invariance *tautologique*. On sépare donc transport et inversibilité.

Tirage en arrière : le sens robuste

Theorem 5 (Jauge induite par tirage en arrière)

Pour toute application $\alpha : E \rightarrow E'$ et toute jauge $\mathcal{J}_{E'}$,

$$x \mathcal{O}_1 y :\Leftrightarrow \alpha(x) \mathcal{O}'_1 \alpha(y), \quad x \mathcal{R} y :\Leftrightarrow \alpha(x) \mathcal{R}' \alpha(y)$$

définit une jauge sur E , dont α est un morphisme.

Portée

Aucune hypothèse sur α . Plier, projeter, écraser : on *rapatrie* toujours une jauge. Seule exigence : l'arrivée est jaugée. Aucun α^{-1} n'intervient.

Poussée en avant : le sens conditionnel

Lemma 6 (Compatibilité strict/équivalence)

Dans un pré-ordre total : $a \mathcal{R} a', b \mathcal{R} b', a \mathcal{O}_1 b \Rightarrow a' \mathcal{O}_1 b'$.

Theorem 7 (Jauge poussée en avant)

α morphisme. La poussée sur $\alpha(E)$ est une jauge **si et seulement si** les fibres saturent l'équivalence :

$$\alpha(x) = \alpha(y) \Rightarrow x \mathcal{R} y \quad (\ker \alpha \subseteq \mathcal{R}).$$

Lecture

Un morphisme peut *fusionner des classes équivalentes*, jamais écraser deux éléments ordonnés. Automatique si α injective.

Monotonie de la finesse

Theorem 8 (Décroissance de la finesse)

$\bar{\alpha} : E/\mathcal{R} \rightarrow \alpha(E)/\mathcal{R}'$ est un morphisme d'ordre surjectif :

$$\#(\alpha(E)/\mathcal{R}') \leq \#(E/\mathcal{R}),$$

égalité ssi $\bar{\alpha}$ injective.

L'invariant réel

Non pas « la jauge se conserve », mais « elle se conserve ou se dégrade ». Le jaugeage ne peut que se *grossir* le long d'une application, jamais s'affiner.

Cas bijectif et signature topologique

Corollary 9 (Invariance stricte)

α bijectif de réciproque morphisme (homéomorphisme) : tirage en arrière et poussée en avant coïncident, jauges isofines, invariance au sens plein.

Corollary 10 (Chute de finesse = événement topologique)

Un recollement qui identifie deux éléments ordonnés viole $\ker \subseteq \mathcal{R}$: la finesse chute sur la couture, comme varie la caractéristique d'Euler–Poincaré.

Möbius / tube

N'est plus une exception : c'est une instance de la monotonie de finesse.

Ontologie : le vocabulaire des transformations

Définitions

Congruence : même classe modulo $\mathcal{R}$.

Égalité : congruence selon *tous* les attributs.

Identité : automorphisme $x \mapsto x$.

Méisme : isomorphisme portant une entité d'un ensemble vers un *élément distinct* d'un autre.

Rôle du méisme

Pont ontologique entre $(E, F, \mathcal{I}_E)$ et $(F, E, \mathcal{I}_F)$ qui conserve statique et dynamique, sans postuler d'ensemble « originel ».

Le quantum et sa dimension

Definition 11 (Quantum)

Une *multiplicité jaugeante* sur E — au sens de Kant (objet doué de grandeur) et de Riemann (variété déterminable).

Definition 12 (Dimension d'un quantum)

Dimension de l'espace quotient de la projection canonique de sa *détermination parfaite*.

Modes de détermination (Cantor, Borel)

Ordonnancement, dénombrement, mesure : autant de manières de bâtir la jauge de capacité.

Couche topologique : locus et situs

Locus (local)

Position d'un élément. Convergence, voisinage, *continuité* comme dimension topologique minimale ; un *continuum* l'est en tout point intérieur.

Situs (global)

Caractères homogènes imposés par le quantum : courbure constante (sphère, hyperbolique, euclidien) vs hétérogène (relativité générale).

Jauge de compatibilité topologique

Relie des situs différents — discret $\leftrightarrow$ continu — via des partitions $\mathcal{J}(\hat{x}, \hat{y})$.

Couche différentielle

Definition 13 (Dérivabilité relationnelle)

α dérivable en e_0 si $\frac{\mu(\alpha(E_i))}{\mu(E_i)}$ converge à gauche ($\mathcal{O}_1$) et à droite ($\mathcal{O}_2$), avec même valeur.

Différentiation vs dérivée

Ne travailler qu'avec la dérivée, c'est postuler une *jauge absolue de la tendance* : le **biais de complexité**.

Couche analytique : $\mathbb{R}$, jauge universelle

Theorem 14 (Jauge analytique par quantification réelle)

Pour tout E et toute application $\alpha : E \rightarrow \mathbb{R}$, le tirage en arrière de $\mathcal{J}(\leq, =)$ jauge E ; α en devient un morphisme.

- **Mesure** $\mu : \mathcal{E}' \rightarrow [0, +\infty]$: jauge sur la *tribu* (les *parties*).
- Pour descendre aux *points* : densité f , fonction de répartition, ou observable $g : F \rightarrow \mathbb{R}$.
- **Composition** : $g \circ \alpha : E \rightarrow \mathbb{R}$ jauge E sans structure intermédiaire.

Couche métrique et pyramide

Jauge métrique

Couple $(\mathcal{R}, \mathcal{O})$ + isomorphisme vers un ensemble de quantification (étalon, norme, mesure de probabilité) pour mesurer écarts et distances.

ensembliste $\rightarrow$ topologique $\rightarrow$ différentielle $\rightarrow$ analytique $\rightarrow$ **métrique**

Pyramide des jauges

Supposer les niveaux implicitement (dériver dans l'espace / le temps) *fonctionne souvent* mais introduit des biais sur une large classe de cas. La méthode explicite les rend visibles.

Trois jauges sur l'espace des configurations $\mathcal{C}$

Par tirage en arrière de trois quantifications réelles

$\mathcal{I}_V$ (énergie V), $\mathcal{I}_\xi$ (coordonnée de réaction ξ), $\mathcal{I}_\sigma$ (paramètre géométrique σ).

Theorem 15 (Transversalité — sur $\mathcal{C}$ entier)

Niveaux $\{V=c\}$, $\{\xi=c\}$, $\{\sigma=c\}$ *transverses* $\Rightarrow$ jauges *deux à deux incomparables* ($\mathcal{R}_\delta$).

Sœurs sous une jauge mère

Toutes dominées par la jauge de configuration $q \mapsto q$, qui est leur *superposition* (borne supérieure de finesse).

Le long du chemin γ : une chaîne de finesse

Theorem 16 (Hiérarchie sur le chemin)

Au-dessus d'une barrière : $\xi \circ \gamma$ monotone (injective), $V \circ \gamma$ replie ($V(q_-) = V(q_+)$, $\xi(q_-) < \xi(q_+)$). Donc $\mathcal{I}_\xi \mathcal{O}_\delta \mathcal{I}_V$, stricte au pli.

Corollary 17

*$\mathcal{I}_\xi$ est la **jauge optimale** (capacité + finesse maximale); V est une jauge optimale dégradée.*

Theorem 18 (Rupture de liaison)

La connectivité $\mathcal{I}_\kappa$ viole $\ker \subseteq \mathcal{R}$ à l'état de transition : chute de finesse = signature de l'événement chimique.

Lecture de la figure (trois panneaux, axe ξ)

- $\mathcal{I}_\xi$: droite monotone — finesse maximale.
- $\mathcal{I}_V$: barrière ; q_- , q_+ au même niveau — repli.
- $\mathcal{I}_\kappa$: marches ; chute à l'état de transition.

Trois propriétés préservées

ξ : la monotonie.

V : la régularité.

κ : la connectivité.

Un même événement, trois réponses distinctes.

La boucle sensori-motrice

Deux voies, pas une flèche

$a : I \rightarrow \Phi$ (efférente, action), $p : \Phi \rightarrow I$ (afférente, perception). Espace fonctionnel Φ jaugé par la valeur/viabilité.

Definition 19 (Jauge interne = paysage de valeur)

$\mathcal{J}_I := a^* \mathcal{J}_\Phi : x \preceq_I y \Leftrightarrow a(x) \preceq_\Phi a(y).$

Ce qui est *automatique*

L'ordre de valeur, par tirage en arrière, sans structure préalable sur I . Mais c'est un *paysage*, pas une *trajectoire*.

Trois conditions, trois conséquences

Cohérence

p morphisme $\Rightarrow T = p \circ a$ morphisme : la boucle ne *renverse* pas la valeur.

Ascension (Lyapunov)

$x \preceq_I T(x) \Rightarrow$ trajectoires *montantes*; un point fixe est un **état adapté** (maximal).

Stabilité

$T^* \mathcal{J} = \mathcal{J}$ (T plongement d'ordre) : la jauge est *point fixe de sa propre induction*.

Adaptation = jauge stable sous la boucle.

Borne de discrimination et voisinage théorique

Theorem 20 (Finesse interne bornée)

$\bar{a} : I/\mathcal{R}_I \hookrightarrow \Phi/\mathcal{R}_\Phi$ injective :

$$\#(I/\mathcal{R}_I) \leq \#(\Phi/\mathcal{R}_\Phi).$$

Prédiction falsifiable

L'organisme ne distingue que ce que sa lecture fonctionnelle distingue : **perception catégorielle**, seuils sensoriels.

Situation

Généralise Ashby (ultrastabilité) et Aubin (viabilité). Apport propre : *hiérarchie* de jauges + *ordre générique* qui préserve les compromis incomparables (survie vs reproduction).

Ce que le cadre apporte

- Un *invariant correct* : la jaugeabilité se transporte par tirage en arrière ; la finesse ne fait que décroître.
- Une *signature* unifiée : chute de finesse = événement topologique (Möbius, état de transition).
- Un *ordre générique* qui assume l'incomparabilité — vertu descriptive en physique (situs transverses) comme en biologie (compromis).
- Une *stratification* explicite qui débusque le biais de complexité des modèles différentiels implicites.

Pistes ouvertes

- Renforcer le théorème de stabilité : hypothèse de compacité / continuité de T pour garantir $K = \bigcap_n T^n(I) \neq \emptyset$.
- Boucle : composer les deux tirages en sens inverses et chercher la jauge auto-cohérente sur l'attracteur.
- Photon : reformuler l'interférence *photon par photon* (un seul photon interfère avec lui-même), non comme interaction à deux corps.
- Figure complémentaire : feuilletages transverses de $\mathcal{C}$ illustrant l'incomparabilité hors-chemin.