Nombres algébriques et transcendants

Hugues GENVRIN

03/12/2025

Historique

1. Lindemann démontre la transcendance de π (1882).
2. Baker démontre la transcendance de e et π (1966-1967).

F.Lindemann(1852-1939)

A.Baker (1939-2018)

Figure – Historique des résultats.

Definition (Nombres algébriques (A))

Un nombre est algébrique s'il est racine d'un polynôme à coefficients rationnels.

Definition (Nombres transcendants (T))

Un nombre est transcendant s'il n'est pas racine d'aucun polynômes à coefficients rationnels.

Expression de l'exponentielle

Qui n'est plus une constante fondamentale

Soit $\ln(2^{\frac{1}{\ln 2}}) = 1 \Leftrightarrow \ln^{-1} \circ \ln(2^{\frac{1}{\ln 2}}) = \ln^{-1} 1 \Leftrightarrow 2^{\frac{1}{\ln 2}} = \exp(1)$.

$$\boxed{e = 2^{\frac{1}{\ln 2}}}$$

Système formel

Arckhectonique et construction d'un langage de classe

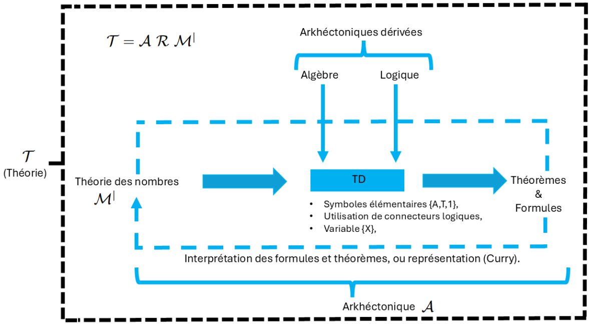

Figure – Arkhéctonique.

x et $\frac{1}{x}$

Montrons que si un nombre est transcendant, son inverse l'est aussi. On prend $x \in \mathbb{R}^*$ T, $x \times \frac{1}{x} = 1$ est algébrique. Donc, nécessairement $\frac{1}{x}$ est transcendant.

Car si $\frac{1}{x}$ était A, son produit par x qui est un nombre transcendant serait transcendant. Or 1 est algébrique.

Soit T un nombre transcendant et A un nombre algébrique. Si l'on a $TA = A \Leftrightarrow T = 1$, or 1 est algébrique. D'où $\frac{1}{x}$ est T.

A fortiori, si $\frac{1}{x}$ est algébrique, alors x est algébrique, on prend $x := \frac{1}{x}$.

Transcendance de $\ln 2$ et $\frac{1}{\ln 2}$

Soit $x = 2^{\frac{1}{\ln 2}^{\ln 2}}$. Faisons l'hypothèse que $\frac{1}{\ln 2}$ est algébrique. C'est à dire aussi que $\ln 2$ est algébrique. Or $2^{\frac{1}{\ln 2}} = e = T$.

Donc, en langage de classe $A^{A^A} = T^A \Leftrightarrow A^A = T$. Or $\exists P_1 \mid P_1[A^A] = 0$, car :

$$A^A = A \Leftrightarrow A \ln A = \ln A \Leftrightarrow A = 1$$

et $\nexists P_2 \mid P_2[T] = 0$. Or $P_1[T] = 0$. Ce qui est contradictoire.

Donc on déduit que $A^A = T$ est faux. On en tire que l'hypothèse de départ $\frac{1}{\ln 2} = A$ est fausse.

En conclusion, $\boxed{\ln 2 = T \text{ et } \frac{1}{\ln 2} = T}$.

Transcendance de $\ln A$ et $\frac{1}{\ln A}$

Soit $\forall y \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$, $x = {y^{\frac{1}{\ln y}}}^{\ln y}$ soit $x = {A^{\frac{1}{\ln A}}}^{\ln A}$. Faisons l'hypothèse que $\frac{1}{\ln A}$ est algébrique. C'est à dire aussi que $\ln A$ est algébrique. Or $A^{\frac{1}{\ln A}} = e = T$.

Donc, en langage de classe $A^{A^A} = T^A \Leftrightarrow A^A = T$. Or $\exists P_1 \mid P_1[A^A] = 0$, car $A^A = A \Leftrightarrow A \ln A = \ln A \Leftrightarrow A = 1$ et $\nexists P_2 \mid P_2[T] = 0$. Or $P_1[T] = 0$. Ce qui est contradictoire.

Donc on déduit que $A^A = T$ est faux. On en tire que l'hypothèse de départ $\frac{1}{\ln A} = A$ est fausse.

En conclusion, $\boxed{\ln A = T \text{ et } \frac{1}{\ln A} = T}$.

Que e^π et π^e sont algébriques

On a $2^{\frac{1}{\ln 2}^{\ln 2}} = 2 \Leftrightarrow A^{T^T} = A \Leftrightarrow T^T = 1 = A$.

Theorem

e^π et π^e sont algébriques.

Theorem

$T^T = A$.

Transcendance de π

Soit $e^{\imath\pi} = -1$, avec $e = T, \imath = 1, -1 = A$. Alors formons l'hypothèse que $\pi = A$. Il vient $T^{AA} = A \Leftrightarrow T^{A^A} = A$. Or $A^A = A \Rightarrow T^{A^A} = T^A$. Donc $T^A = A$, ce qui entraîne que $A \ln T = \ln A$. Comme $\ln A = T$ et $\ln T = A$, on en déduit que $AA = T \Leftrightarrow A^2 = T \Leftrightarrow A = T$, ce qui est incohérent.

Donc, l'hypothèse de départ $\pi = A$ est rejetée.

Theorem

π est transcendant.

La formule d'Euler formait une heuristique pour dire que $e^{\pi} \neq T$.

$T^{TA} = A \Leftrightarrow T^T \neq T$.

Transcendance de e

On a $e^{\ln 2} = 2 \Leftrightarrow X^T = A$ où X est une variable du langage de classe.

$X^T = A \Leftrightarrow T \ln X = \ln A \Leftrightarrow \ln X = 1 \Leftrightarrow \ln X = A$.

Sachant que $\ln A = T$, il vient $\overline{\ln A} = \overline{T} \Leftrightarrow \ln \overline{A} = \overline{T} \Leftrightarrow \ln T = A$.
D'où $X = T$.

Theorem

e est transcendant.

Formule d'Euler

D'après la formule d'Euler : $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{i=1}^{n_\infty} \frac{1}{i^2}$. Dans le cadre de l'infini actuel, la sommation s'achève en $\frac{1}{n_\infty^2}$, qui vaut un zéro plus fin que celui de $0 = \frac{1}{n_\infty}$, mais plus épais que celui de $\frac{1}{2^{n_\infty}}$. Tout en ayant $\frac{1}{(n_\infty - 1)^2}$ qui sera fini (car $_\infty - 1$ est fini). Soit on déduit que $\frac{\pi^2}{6}$ est une somme de rationnels, c'est donc un rationnel.

Montrons que π est alors irrationnel. Pour cela, on suppose que $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{p}{q}$, où $a, b, p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $a \wedge b = 1$ et $p \wedge q = 1$. Soit $c \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \mathbb{N}$, tel que $b = cq^2$. Si c est rationnel, alors Alors $\sqrt{\frac{a}{cq^2}} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = p^2$. D'où $a = p^2 c$. Or p et a doivent être entiers et c n'est pas un entier. Donc l'hypothèse de départ est fausse. Pour le cas $c = 1 \Leftrightarrow b = q^2$ soit b doit être une puissance de 2. Mais dans ce cas, $a = p^2$, soit a doit aussi être une puissance de 2. D'où $\frac{a}{b}$ n'est pas irréductible, ce qui est contraire aux hypothèses de départ.

π est irrationnel

Back up

Historique

Nbres algébriques et transcendants

$2^{\frac{1}{\ln 2}}$

Formalisation

x et $\frac{1}{x}$

$\ln 2$ et $\frac{1}{\ln 2}$

e^π et π^e

π et e

Irrationalité de π