

Niveau d'observation

Point de résolution, suite adjacente de trois grains et droite à l'infini —
cours

Hugues Genvrin

Septembre 2026

Présentation du cours

Une question de représentation

*Dans une figure de la théorie du grain, quel est le « point » ? Ce n'est pas le point euclidien, de mesure nulle : c'est un **grain**, de mesure infinitésimale non nulle.*

Ce que le cours établit

1. La notion de **niveau d'observation**, qui rend relatifs les statuts « ponctuel », « limité », « à l'infini ».
2. Une **suite de trois grains** tangents reproduit, vue depuis n'importe quel grain, la suite $O, C_{+n_\infty}, \Delta_\infty$ du chapitre 3 du livre.
3. Un critère (la **flèche en grains**) tranche entre cercle et droite à l'infini.
4. Dans le plan : **un** niveau d'observation pour le plan réel, **deux niveaux congruents** pour le plan complexe.
5. La tour est **autosimilaire** ; son point fixe est le **zéro absolu**, et elle n'est pas fractale.

Plan

Motivation

Rappels

Le niveau d'observation

Suite adjacente de trois grains

Le flot de dilatation

Cercle ou droite à l'infini

Deux lectures de la dilatation

Autosimilarité de la tour et grain nul

Le plan : un ou deux niveaux

Règles de lecture des figures

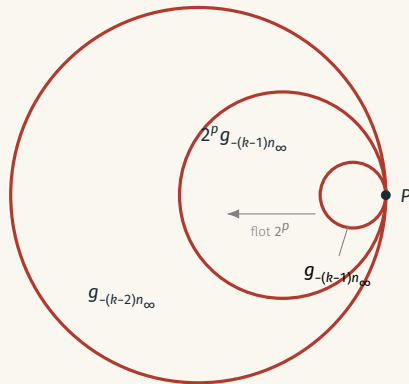
Synthèse

Motivation

Toute figure a une résolution

- Sur un écran, l'unité est le **pixel** : plus petit qu'un pixel, c'est invisible ; des millions de pixels paraissent continus.
- Dans la théorie du grain, ce n'est pas un défaut de la représentation : c'est la **structure du continu**.
- Un grain d'apparence ponctuelle a une épaisseur **non nulle** ; le point du continu n'apparaît qu'à la promotion (déf. 88, rem. 121).

Idée : déclarer, pour chaque figure, quel grain joue le rôle du point.



trois grains tangents au point de résolution $P = g_{-kn_{\infty}}$

Rappels

- $\delta_k = 2^{-kn_\infty}$; g_{-kn_∞} est un grain d'épaisseur δ_k .
- Chaque grain de niveau $-(k-1)n_\infty$ contient exactement 2^{n_∞} grains de niveau $-kn_\infty$ (prop. 53 du livre).
- Tour strictement décroissante $\delta_1 > \delta_2 > \dots > 0$, tous de promotion nulle (th. 64).

Convention : grain et cercle

Comme pour le cercle unité de circonférence 1 (déf. 77) et le situs circulaire, on représente un grain d'épaisseur δ comme un **cercle de circonférence δ** . Un grain de niveau $-(k-1)n_\infty$ est un cercle formé de 2^{n_∞} grains de niveau $-kn_\infty$, ses jonctions.

La construction ascendante du chapitre 3

Le livre dilate le cercle unité C_1 , tangent en O , en C_{+n_∞} puis C_{+2n_∞} , tous tangents en O .

Niveau $+n_\infty$

Courbure 2^{-n_∞} encore **inversible** : « très grand mais encore circulaire » (rem. 17).

C'est aussi le **cercle à l'infini** C_{n_∞} du chap. 18 (déf. 93), de courbure visible (th. 68).

Niveau $+2n_\infty$

Courbure 2^{-2n_∞} **non inversible** : C_{+2n_∞} s'identifie à sa tangente en O .

C'est la **droite à l'infini** Δ_∞ (déf. 36).

Le seuil de la droite à l'infini est à **deux crans** de dilatation, pas à un seul.

Le niveau d'observation

Définition 1 (Niveau d'observation)

Une représentation est **au niveau d'observation k** si son unité élémentaire est le grain g_{-kn_∞} : tout objet y est une réunion de tels grains, toute longueur y est comptée en nombre de grains. Ce grain est le **point de résolution**.

Nombre de points de résolution d'un objet X : $\#_k(X) = \ell(X)/\delta_k$.

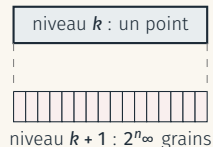
Définition 2 (Statut relatif)

Au niveau d'observation k , X est

- **ponctuel** si $\#_k(X) \leq 1$;
- **limité** si $\#_k(X)$ est limité ;
- **à l'infini** si $\#_k(X)$ est illimité.

Point de résolution et point euclidien

- Le point de résolution a une mesure $\delta_k \neq 0$.
- Il a une **structure interne** (2^{n_∞} sous-grains), que le niveau k ne montre pas et que le niveau $k + 1$ montre.
- Le point euclidien n'est le point de résolution d'**aucun** niveau : il n'apparaît qu'à la promotion.



C'est la distinction de la déf. 88 du livre : grain d'apparence ponctuelle / point du continu.

Proposition 3 (Relativité)

$\#_{k+1}(X) = 2^{n_\infty} \#_k(X)$. En conséquence :

1. un grain de niveau $-kn_\infty$ est ponctuel au niveau k et à l'infini au niveau $k+1$;
2. un objet limité non ponctuel au niveau k est à l'infini au niveau $k+1$;
3. un objet de longueur $\geq \delta_m$ n'est ponctuel à aucun niveau $k > m$.

Preuve. $\delta_k = 2^{n_\infty} \delta_{k+1}$. Point 2 : $2^{n_\infty} \#_k(X) \geq 2^{n_\infty}$. Point 3 : $\#_k(X) \geq \delta_m / \delta_k = 2^{(k-m)n_\infty} > 1$. $\square$

Principe 3 du livre, rendu quantitatif

« Ponctuel », « limité », « à l'infini » ne sont pas des propriétés d'un objet, mais d'un objet à un niveau d'observation.

Suite adjacente de trois grains

Point, cercle élémentaire, horizon

On fixe le niveau d'observation $k \geq 2$ et un point de résolution P .

Définition 4 (Suite adjacente de trois grains)

Trois grains emboîtés de niveaux consécutifs,

$$g_{-kn_\infty} \subset g_{-(k-1)n_\infty} \subset g_{-(k-2)n_\infty},$$

représentés comme trois cercles tangents en P : le point, le cercle élémentaire, l'horizon.

Proposition 5 (Le cercle élémentaire est un situs)

Au niveau k : le cercle élémentaire compte 2^{n_∞} points de résolution, l'horizon 2^{2n_∞} . Tous deux sont à l'infini.

Preuve. $\delta_{k-1}/\delta_k = 2^{n_\infty}$, $\delta_{k-2}/\delta_k = 2^{2n_\infty}$.

□

La définition des statuts ne distingue pas le cercle élémentaire de l'horizon : la différence est d'ordre, et se lit sur la courbure.

Pourquoi « cercle élémentaire » ?

Le deuxième grain est le plus petit cercle qui, au niveau k , se compose de points de résolution.

- Par déroulement de la classe $\mathcal{G}_{-(k-1)n_\infty} = 2^{n_\infty} g_{-kn_\infty}$, il est formé de 2^{n_∞} points de résolution.
- Circonférence $\delta_{k-1} = 2^{-(k-1)n_\infty}$; épaisseur du point $\delta_k = 2^{-kn_\infty}$.
- Il n'est unitaire (épaisseur unitaire), comme C_1 , déf. 77) que pour $k = 1$: c'est alors g_0 .

Pas le cercle unité, mais son image

Pour $k \neq 1$, sa circonférence est infinitésimale ($k > 1$) ou illimitée ($k < 1$). C'est l'image du cercle unité par une homothétie de rapport $2^{-(k-1)n_\infty}$; l'autosimilarité de la tour permet toujours de s'y ramener. Les rapports sont ceux du chapitre 3 : l'horizon compte 2^{n_∞} cercles élémentaires (C_1, C_{+n_∞}).

Le flot de dilatation

Une homothétie de centre le point de résolution

Définition 6 (Flot)

Pour $0 \leq p \leq n_\infty$, H_p est l'homothétie de centre P et de rapport 2^p , et $C_p = H_p(g_{-(k-1)n_\infty}) = 2^p \cdot g_{-(k-1)n_\infty}$.

Proposition 7

1. Tous les C_p passent par P avec la même tangente : ils sont **tangents entre eux en P** .
2. C_p a pour circonférence $2^p \delta_{k-1}$; au niveau k , il compte $2^{n_\infty+p}$ points de résolution.
3. $C_{n_\infty} = g_{-(k-2)n_\infty}$: le flot mène du cercle élémentaire à l'horizon.

Preuve. Le centre Ω du cercle élémentaire est sur la normale en P ; H_p fixe P et envoie Ω sur Ω_p de la même normale, avec $P\Omega_p = 2^p P\Omega$. Une homothétie de rapport 2^p multiplie les longueurs par 2^p . Pour $p = n_\infty$: $2^{n_\infty} \delta_{k-1} = \delta_{k-2}$. □

Trois remarques sur le flot

- **Centre P , pas le centre du cercle.** Une dilatation autour du centre donnerait des cercles **concentriques**. Le point de résolution est le **point fixe** du flot, comme O dans le livre.
- **C'est le procédé de bisection.** À chaque cran $p \rightarrow p + 1$, le rayon double : c'est la bisection itérée du chap. 18, dont l'étape n_∞ donne le cercle à l'infini C_{n_∞} . Ici, vue depuis un grain quelconque.
- **Les étapes intermédiaires.** Pour $0 < p < n_\infty$, la circonférence $2^{-((k-1)n_\infty - p)}$ est une puissance de 2 : C_p est un grain du niveau de résolution $-((k-1)n_\infty - p)$. Le flot parcourt **un à un les n_∞ niveaux de résolution** entre deux strates.

Strates et niveaux de résolution

Strates : niveaux multiples de n_∞ . Niveaux de résolution : tout entier m (grain 2^{-m}), puis tous les niveaux hyperfinis, jusqu'à l'illimité, où l'on n'a plus un grain mais un point du continu, g_{-N_0} (th. 63).

Cercle ou droite à l'infini

Un critère : la flèche comptée en grains

Pour savoir si un cercle se confond avec sa tangente, il faut une **échelle** : le niveau d'observation la fournit.

Définition 8 (Flèche)

Cercle de N points de résolution, de rayon $R = N/(2\pi)$, tangent en P à T . À la distance ℓ de P le long du cercle :

$$f(\ell) = R(1 - \cos(\ell/R)).$$

Le cercle **se confond avec sa tangente** sur $|\ell| \leq L$ si $f(\ell) < 1$: l'écart reste sous un point de résolution.

Lemme 9

$$\frac{\ell^2}{2R} \left(1 - \frac{\ell^2}{12R^2}\right) \leq f(\ell) \leq \frac{\ell^2}{2R} = \frac{\pi \ell^2}{N}.$$

Preuve. encadrement $\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{24} \leq 1 - \cos t \leq \frac{t^2}{2}$, transféré à $\tilde{R}$. □

Fenêtre de rectitude : demi-largeur $\approx \sqrt{N/\pi}$, sur l'arc $[-L, L]$ **symétrique** autour de P .

Théorème 10

Au niveau d'observation k :

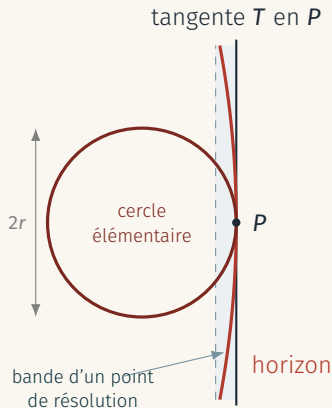
1. Le cercle élémentaire reste un cercle. Il ($N = 2^{n_\infty}$) se confond avec sa tangente sur $\approx 2^{n_\infty/2}$ points : illimité, mais fraction $\approx 2^{-n_\infty/2}$ de sa circonférence. Sa courbure est visible.
2. L'horizon est une droite à l'échelle du cercle élémentaire. Sur toute la fenêtre $|\ell| \leq 2r$, $r = 2^{n_\infty}/(2\pi)$, occupée par le cercle élémentaire :

$$f(\ell) \leq \frac{\pi(2r)^2}{2^{2n_\infty}} = \frac{1}{\pi} < 1.$$

Preuve.

1. $f < 1$ dès que $|\ell| < 2^{n_\infty/2}/\sqrt{\pi}$; pour $\ell = 2 \cdot 2^{n_\infty/2}$, $\ell^2/(2R) = 4\pi$ et $f > 1$. Au point opposé à P , l'écart vaut $2r$.
2. $N = 2^{2n_\infty}$ et $|\ell| \leq 2^{n_\infty}/\pi$: $f \leq \pi(2^{n_\infty}/\pi)^2/2^{2n_\infty} = 1/\pi$. □

La figure du théorème



À l'échelle du cercle élémentaire, l'horizon reste dans une bande d'un point de résolution (flèche $\leq 1/\pi$) : c'est une droite. Le cercle élémentaire s'écarte de sa tangente jusqu'à $2r$: c'est un cercle.

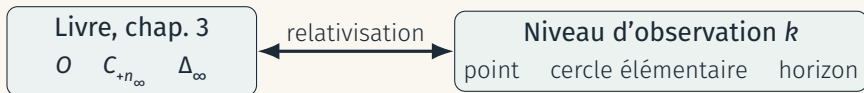
Relativement à quoi ?

Corollaire 11 (Deux étalons, deux statuts)

1. Relativement au cercle élémentaire (pris pour unité) : l'horizon est à un cran, c'est le cercle à l'infini C_{n_∞} (déf. 93).
2. Relativement au point de résolution : l'horizon est à deux crans, il franchit le seuil de la rem. 17 ; c'est la droite à l'infini Δ_∞ .
3. Relativement au point de résolution, le cercle élémentaire est à un cran : il est le « cercle à l'infini » du point.

grain	$\#_k$	rectitude	statut / point	statut / cercle élém.
point g_{-kn_∞}	1	—	point	ponctuel
cercle élémentaire $g_{-(k-1)n_\infty}$	2^{n_∞}	$\sim 2^{n_\infty/2}$	cercle à l'infini	étalon
horizon $g_{-(k-2)n_\infty}$	2^{2n_∞}	$\sim 2^{n_\infty}$	droite à l'infini	cercle à l'infini

La suite du chapitre 3, vue depuis n'importe quel grain



- N'importe quel niveau k peut jouer le rôle de l'unité.
- La suite de trois grains $k, k-1, k-2$ reproduit les niveaux $0, +n_\infty, +2n_\infty$.

La fenêtre de rectitude est à mi-niveau

Un cercle de 2^{jn_∞} points se confond avec sa tangente sur $\sim 2^{jn_\infty/2}$ points : toujours à **mi-strate**, niveau de résolution $-jn_\infty/2$ (un vrai grain si jn_∞ est pair).

Deux lectures de la dilatation

Le niveau d'observation suit-il le cercle élémentaire ?

Définition 12 (Les deux lectures)

- (A) L'observation suit le cercle élémentaire : on dilate tout, y compris les grains. Le nombre de points reste 2^{n_∞} .
- (B) L'observation reste fixe : le point garde son épaisseur δ_k ; C_p compte $2^{n_\infty+p}$ points.

(A) est la lecture du livre (th. 22 : les grains-points deviennent des « zéros dilatés » de longueur 2π). (B) est celle de la figure.

Proposition 13

Pour $p = n_\infty$, la lecture (A) au niveau k coïncide avec la lecture (B) au niveau $k - 1$: 2^{n_∞} points d'épaisseur δ_{k-1} .

Preuve. (A) : 2^{n_∞} arcs $2^{n_\infty}\delta_k = \delta_{k-1}$. (B) au niveau $k - 1$: $\delta_{k-2}/\delta_{k-1} = 2^{n_\infty}$. □

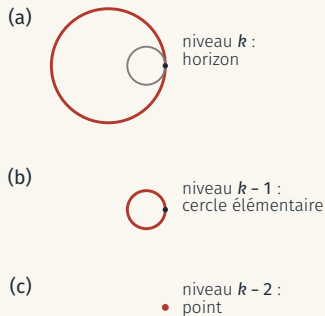
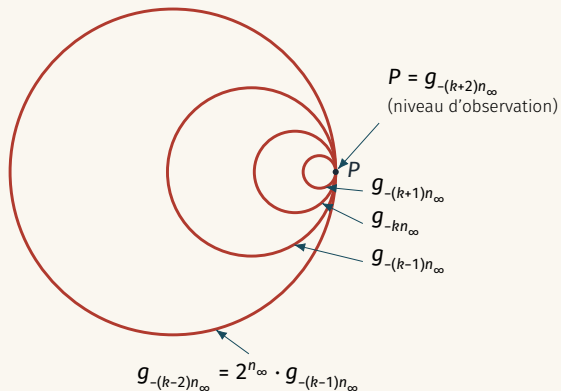
Comparaison des deux lectures

	(A) observation suit le cercle élémentaire	(B) observation fixe
taille du point de résolution	$2^p \delta_k$	δ_k
nombre de points sur C_p	2^{n_∞}	$2^{n_\infty + p}$
horizon ($p = n_\infty$)	2^{n_∞} zéros dilatés	2^{2n_∞} points
statut de l'horizon	cercle (auto-similaire)	droite à l'infini

- En (A), rien ne change qualitativement : c'est le **situs circulaire auto-similaire**.
- En (B), la dilatation fait apparaître des **points nouveaux**, et c'est elle qui produit la droite à l'infini.

Autosimilarité de la tour et grain nul

Un grain qui passe au sous-sol



À gauche : la tour vue depuis le grain de P , $g_{-(k+2)n_\infty}$. À droite : on suit $g_{-(k-2)n_\infty}$ pendant que le niveau d'observation descend (il s'épaissit), k , $k-1$, $k-2$. Les grains plus fins que le point passent au sous-sol : ils existent, la figure ne les montre plus.

L'homothétie de strate

Dans cette section, k parcourt tous les entiers hyperfinis, positifs ou négatifs ; $\delta_k = 2^{-kn_\infty}$.

Définition 14 (Homothétie de strate)

H : homothétie de centre P et de rapport 2^{n_∞} ($= H_{n_\infty}$) ; H^j a pour rapport 2^{jn_∞} .

Proposition 15 (Externe = interne)

$H(g_{-kn_\infty}) = g_{-(k-1)n_\infty}$: l'homothétie externe, qui agit sur la figure, coïncide sur la tour avec le décalage interne $k \mapsto k - 1$.

Théorème 16 (Autosimilarité de la tour)

1. La tour $\mathcal{T} = \{g_{-kn_\infty}\}_k$, en cercles tangents en P , vérifie $H(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$.
2. $\#_k(g_{-jn_\infty}) = 2^{(k-j)n_\infty}$ ne dépend que de $k - j$: la représentation au niveau k est l'image par $H^{k-k'}$ de celle au niveau k' .

Preuve. H fixe P et multiplie les longueurs par 2^{n_∞} : $2^{n_\infty}\delta_k = \delta_{k-1}$. □

Dilater la figure (A) ou passer du niveau k au niveau $k - 1$ (B) : même opération.

Le cercle élémentaire et le niveau g_0

- Au niveau k , le cercle élémentaire $g_{-(k-1)n_\infty}$ a pour circonférence $\delta_{k-1} = 2^{-(k-1)n_\infty}$.
- Il est unitaire (circonférence π , comme C_1) seulement pour $k = 1$: c'est alors g_0 .
- Pas d'indétermination : n_∞ est un entier hyperfini et $0 \cdot n_\infty = 0$ exactement.

g_0 n'a rien de privilégié

Le niveau appelé 0 est un choix d'unité, un artefact de l'indexation. Par l'autosimilarité, H^{k-1} ramène toujours au cas $k = 1$: tout ce qui se dit du cercle unité se dit de n'importe quel cercle élémentaire.

Définition 17 (Statut relatif à une strate)

$x > 0$ est, relativement à la strate j , **infinitésimal** si $x/\delta_j \approx 0$, **appréciable** si x/δ_j est limité non infinitésimal, **illimité** si x/δ_j est illimité.

Proposition 18 (Relativité et réciprocity)

1. Appréciable relativement à $j \Rightarrow$ infinitésimal relativement à $j - 1$, illimité relativement à $j + 1$.
2. Si $\delta_K \leq x \leq \delta_{-K}$ (K hyperfini) : x est infinitésimal relativement à $-K - 1$, illimité relativement à $K + 1$.

Preuve. $x/\delta_{j+1} = 2^{+n_\infty} x/\delta_j$; $x/\delta_{-K-1} \leq 2^{-n_\infty} x/\delta_{-K}$, $x/\delta_{K+1} \geq 2^{n_\infty} x/\delta_K$.

□

Toute grandeur finie est infinitésimale quelque part, et réciproquement

C'est, en termes de grains, la **standardité relative** de Hrbacek : chaque niveau peut être pris pour le niveau standard.

Ce qui est relatif, et ce qui ne l'est pas

Relatif au niveau

- le **statut** d'une grandeur : infinitésimale, finie, infinie ;
- le zéro infinitésimal et le zéro faible (théorie de la mesure).

Absolu

- les **rapports** : « $x/y \approx 0$ » est invariant par H ;
- le **zéro exact**.

- **Étendue de la tour.** Si k ne parcourt que les entiers limités, 2^{n^∞} échappe à toutes les strates : d'où le choix des k hyperfinis.
- **Pourquoi le pas 2^{n^∞} et non 2.** L'homothétie de rapport 2 laisse aussi la tour des résolutions invariante, mais un limité fois 2 reste limité. Seul un rapport **illimité** change les statuts : l'autosimilarité qui compte est de strate en strate.

Le grain nul, point fixe de l'homothétie

En descendant la tour, les cercles se resserrent vers P ; à l'illimité, on obtient $g_{-\aleph_0}$, **point du continu**, non un grain.

Proposition 19 (Le zéro est le point fixe)

1. Aucun grain n'est fixé par H : $H(g_{-kn_\infty}) \neq g_{-kn_\infty}$ (non-idempotence).
2. Le seul point fixe de H est son centre P , pris comme point exact.
3. Les disques des g_{-kn_∞} décroissent, de diamètres δ_k/π de promotion nulle : leur intersection est P .

$$\aleph_0 - 1 = \aleph_0$$

L'écriture heuristique dit que H laisse le zéro en place. Tout grain peut être ramené à $k = 1$; le zéro **non** : c'est ce qui en fait un zéro **absolu**. Le point de résolution de chaque niveau en est la représentation à ce niveau.

Autosimilaire, mais pas fractale

Dimension d'homothétie : N copies réduites dans le rapport $r < 1$, $D_h = \frac{\ln N}{\ln(1/r)}$.

Le long de la tour

$g_{-(k-1)n_\infty} \mapsto g_{-kn_\infty} : N = 1, r = 2^{-n_\infty}$.

$$D_h = \frac{\ln 1}{\ln 2^{n_\infty}} = 0.$$

Attracteur : le point fixe P (Hutchinson).

À l'intérieur d'un grain

$g_{-(k-1)n_\infty} = 2^{n_\infty}$ grains $g_{-kn_\infty} : N = 2^{n_\infty}, r = 2^{-n_\infty}$.

$$D_h = \frac{\ln 2^{n_\infty}}{\ln 2^{n_\infty}} = 1.$$

Structure du continu (prop. 53).

Conclusion

La figure est **invariante** par H (autosimilaire au sens faible), mais son attracteur est un point, de dimension nulle : le **zéro absolu**. Chaque cercle, et leur réunion, reste de dimension **1** : pas de fractale.

Le plan : un ou deux niveaux

Niveaux congruents : le sens arithmétique

Définition 20 (Niveaux congruents)

Deux niveaux de pas $\delta \leq \delta'$ sont **congruents** si

$$\delta' \equiv 0 \pmod{\delta}, \quad \delta' = c \delta, \quad c \in \tilde{\mathbb{Z}},$$

c'est-à-dire $\delta' \tilde{\mathbb{Z}} \subset \delta \tilde{\mathbb{Z}}$. L'entier c est le **rapport de congruence**.

Proposition 21 (Congruence dans la tour)

1. Deux niveaux de la tour sont congruents : $c = 2^{(k-j)n_\infty}$.
2. Le plus fin est un **raffinement commun** : chaque grain grossier est la réunion de c grains fins.

Congruent, commensurable, incommensurable

2^{-n_∞} et 3^{-n_∞} : commensurables (raffinement 6^{-n_∞}), mais **non congruents**. 2^{-n_∞} et $\sqrt{2} \cdot 2^{-n_\infty}$: incommensurables.

La démarcation arithmétique

Grille du plan : $\Pi(\delta_1, \delta_2) = \delta_1 \tilde{\mathbb{Z}} + i \delta_2 \tilde{\mathbb{Z}}$, grains rectangles $\delta_1 \times \delta_2$.

Théorème 22 (Démarcation)

1. **Plan réel** : $\Pi(\delta, \delta)$; un seul niveau, $c = 1$, grains carrés.
2. **Plan complexe** (lecture à deux résolutions) : $\Pi(\delta_f, \delta_g)$, $\delta_g = 2^{n_\infty} \delta_f$; deux niveaux distincts et congruents, $c = 2^{n_\infty}$.
3. Le plan complexe est encadré par deux plans réels :

$$\Pi(\delta_g, \delta_g) \subset \Pi(\delta_f, \delta_g) \subset \Pi(\delta_f, \delta_f).$$

Preuve. $\delta_g \tilde{\mathbb{Z}} \subset \delta_f \tilde{\mathbb{Z}}$ par la congruence, axe par axe.



Le critère est arithmétique

C'est le rapport de congruence c : 1 pour le plan réel, 2^{n_∞} pour le plan complexe.

Approfondissement : le sens géométrique

Pour un rapport c : $J_c(x, y) = (-y/c, cx)$ et $E_c(x, y) = (y/c, cx)$.

Proposition 23 (Les échanges existent dans les deux plans)

Sur $\Pi(\delta, c\delta)$, pour tout c :

1. J_c, E_c agissent sur les indices par $(m, n) \mapsto (-n, m)$ et $(m, n) \mapsto (n, m)$;
2. $J_c^2 = -\text{Id}$ (quart de tour), $E_c^2 = \text{Id}$ (miroir) ;
3. ils engendrent le groupe du carré sur $\tilde{\mathbb{Z}}^2$, quel que soit c .

Preuve. $J_c(m\delta, nc\delta) = (-n\delta, mc\delta)$, $E_c(m\delta, nc\delta) = (n\delta, mc\delta)$. □

Sur les indices, les deux plans sont **indiscernables** : le sens géométrique n'est pas, à lui seul, un critère de démarcation.

Ce que le rapport change à la géométrie

Proposition 24

1. J_c est une isométrie si et seulement si $c = 1$; alors $J_1 = R$, le quart de tour ordinaire.
2. R laisse $\Pi(\delta, c\delta)$ invariante si et seulement si $c = 1$.
3. Isométries de la grille : groupe du **carré** (ordre 8) si $c = 1$, du **rectangle** (ordre 4) si $c \neq 1$.

Preuve. (1) $|J_c(x, 0)| = c|x|$. (2) $R(\delta, 0) = (0, \delta) \in \text{grille}$ ssi $\delta \in c\delta\mathbb{Z}$. (3) Si $c \neq 1$, une isométrie préserve les directions des axes. $\square$

Moins de symétries, un opérateur distingué

Plan réel : plus de symétries, aucune privilégiée. Plan complexe : ni J_c ni E_c n'est une isométrie ; la **superposition** (retournement traversé une fois) sélectionne J_c . La géométrie découle de la congruence, et non l'inverse.

Plan réel et plan complexe

	plan réel	plan complexe
pas des axes	(δ, δ)	$(\delta_f, \delta_g), \delta_g = 2^{n_\infty} \delta_f$
niveaux d'observation	un	deux, congruents
rapport de congruence c	1	2^{n_∞}
grain	carré	rectangle
réseau des indices	$\tilde{\mathbb{Z}}^2$	$\tilde{\mathbb{Z}}^2$
échanges conservant les comptes	groupe du carré	groupe du carré
quart de tour ($J_c^2 = -Id$)	oui	oui
J_c isométrique	oui ($J_1 = R$)	non : il change de grain
isométries de la grille	carré (8)	rectangle (4)
quart de tour privilégié	non	oui (aller-retour en résolution)
promotion	même ensemble $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$	

Portée : caractérise le plan complexe dans la lecture à deux résolutions ; la variante log-polaire n'a qu'un niveau.

Règles de lecture des figures

Trois règles

1. **Déclarer le point de résolution.** Sans lui, « ponctuel » et « à l'infini » n'ont pas de sens.
2. **Lire les rapports comme des crans.** Une figure ne peut pas respecter 2^{n_∞} : les rapports dessinés (ici 1 : 3 : 6) sont symboliques. Chaque cran vaut 2^{n_∞} :
 - un cran depuis le point : **cercle à l'infini** ;
 - deux crans : **droite à l'infini**.
3. **Préciser la lecture de la dilatation.** (A) ou (B) : figures identiques, contenus différents.

Ce que la figure de départ montre vraiment

Niveau k , lecture (B). Le petit cercle est le cercle à l'infini du point. Le grand cercle, dessiné courbe par lisibilité, est la **droite à l'infini** : à l'échelle du petit cercle, il se confond avec la tangente en P à moins d'un point de résolution.

Synthèse

Ce qui est établi

- Le niveau d'observation fait du point du graphe un **grain**, distinct du point euclidien, et rend relatifs les statuts.
- Le flot 2^p est une **homothétie de centre le point de résolution** : le procédé de bisection vu depuis un grain quelconque.
- Point, cercle élémentaire, horizon = $O, C_{+n_\infty}, \Delta_\infty$ relativisés : l'horizon est **droite** à l'infini relativement au point, **cercle** à l'infini relativement au cercle élémentaire.
- Les deux lectures de la dilatation diffèrent d'un **changement de niveau d'observation**.
- Plan réel : un niveau. Plan complexe : **deux niveaux congruents**, rapport 2^{n_∞} . Critère **arithmétique** ; la géométrie des indices ne distingue pas, la métrique distingue à travers c .
- La tour est invariante par l'homothétie de strate : statuts **relatifs**, rapports et zéro exact **absolus** ; le zéro est le point fixe, attracteur de dimension **0** : **pas de fractale**.

1. **Strates et niveaux de résolution.** Le flot parcourt les n_∞ niveaux de résolution entre deux strates ; les fenêtres de rectitude sont à mi-strate. Faut-il fixer la parité de n_∞ ?
2. **Dimension supérieure.** Combien de niveaux congruents, et quels rapports, pour une structure à plus de deux axes (quaternions) ?
3. **Mesure.** Relier systématiquement le niveau d'observation aux algèbres $\mathcal{A}_k$ de la théorie de la mesure du grain, en particulier pour représenter les mesures orientées.

- H. Genvrin, *Théorie du grain*, manuscrit, 2026 (chap. 3, 10, 15, 18).
- H. Genvrin, *Niveau d'observation*, manuscrit, 2026.
- H. Genvrin, *Du cercle complexe au plan complexe : deux axes, deux résolutions*, manuscrit, 2026.
- H. Genvrin, *Plan complexe et grain nul*, manuscrit, 2026.
- H. Genvrin, *Une théorie de la mesure du grain*, manuscrit, 2026.
- K. Hrbacek, « Relative set theory: Internal view », *J. Logic and Analysis* 1 (2009).
- K. Hrbacek, O. Lessmann, R. O'Donovan, *Analysis with Ultrasmall Numbers*, CRC Press, 2015.
- J. E. Hutchinson, « Fractals and self-similarity », *Indiana Univ. Math. J.* 30 (1981).