

Analyse et Théorie des Nombres

Créé en janvier 2008

Hugues Genvrin

30 janvier 2026

L'intégration transfinie suivant la méthode de Riemann

On a $\int_a^{a+1} f(x)dx = \left\{ \sum_{k=na}^{n(a+1)} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right\}_{n \rightarrow +\infty}$ qui peut s'interpréter comme somme de termes transfinis, ou des aires élémentaires transfinies.

On retrouve la formule qui exprime $\ln(2)$:

$$\ln(2) = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \right)_{n \rightarrow +\infty}$$

(1)

Cela est correct dans l'infini potentiel, tout autant que dans l'infini achevé.

$$\ln(2) = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \right\}_{n \rightarrow +\infty}$$

(2)

Autres résultats suivant cette méthode

$$e = \left\{ \frac{n}{(n!)^{\frac{1}{n}}} \right\}_{n \rightarrow +\infty} \text{ (K.Knopp (1951))} \quad (3)$$

$$\left\{ \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \left(\frac{4n}{e} \right)^n \right\}_{n \rightarrow +\infty} \quad (4)$$

$$\left\{ \frac{(2n)!}{(n!)^2} = C_{2n}^n = 4^n \right\}_{n \rightarrow +\infty} \quad (5)$$

$$\text{Formule de Bernouilli } e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \text{ Barnes (1984)} \quad (6)$$

Définition du logarithme Népérien

$$q \in N, \{ \sum_{k=n}^{qn} \frac{1}{k} = \ln(q) \}_{n+\infty} \quad (7)$$

$$\{ \sum_{k=n}^{n^2} \frac{1}{k} = \ln(n) \}_{n+\infty} \quad (8)$$

$$\zeta = \{ 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} - \dots - \frac{1}{n^2} \}_{n+\infty} \quad (9)$$

Théorème du réarrangement de Riemann

Théorème

Si une série à termes réels est semi-convergente, alors par une permutation de ses éléments on peut la faire tendre vers n'importe quel réel ou même vers l'infini.

Or :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n+\infty} u_k - \sum_{k=1}^{n+\infty} u_{\sigma(k)} \longrightarrow \sum_{k=1}^{n+\infty} u_{\sigma'(k)}} \quad (10)$$

\implies Les sommations doivent s'étendre dans le transfini.

Convergence Asymptotique entre des fonctions de puissances et des séries de puissances

$$\left(2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}\right)_{n+\infty} = \ell \quad (11)$$

$$\ell = 1.4583237 \dots$$

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha-1} n^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} - \sum_{k=1}^n k^{\frac{-1}{\alpha}}\right)_{n+\infty} = \ell' \quad (12)$$

$$\left(\sum_{k=1}^n \sqrt{k} = \frac{2}{3} n \sqrt{n}\right)_{n+\infty} \quad (13)$$

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \div \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}\right)_{n+\infty} = \frac{1}{3} \quad (14)$$

Les fonctions ζ

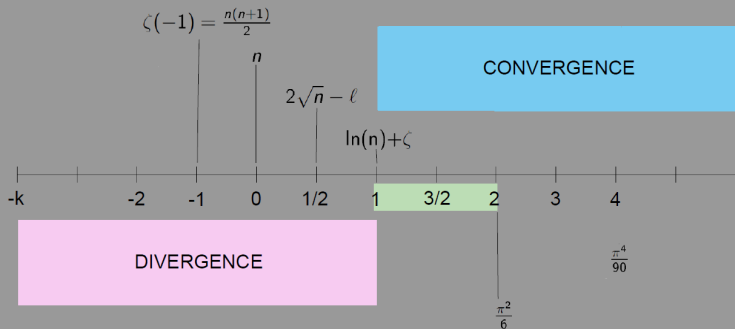
On pose $\zeta(k) = (\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^k})_{n \rightarrow +\infty}$

- ① k peut être entier - (Rationalité de $\zeta(k)$?)
- ② k peut être réel - (Conditions de divergence ou convergence)
- ③ k peut aussi être complexe - (Hypothèse de Riemann)

On pose $\zeta'(k) = (\sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{i^k})_{n \rightarrow +\infty}$ la série alternée de $\zeta(k)$.

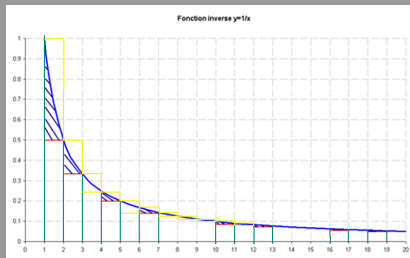
La fonction $\zeta(x)$

$$\zeta(-k)$$



$$\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} B_{2k}$$

Constante de Meissel-Mertens



Soit A_k la série formée par les aires hachurées. On a

$$\sum A_k = \ln(2) - \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \dots = \ln\left(\frac{2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p_k}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times p_{k-1}}\right) - \sum_{i=1}^k \frac{1}{p_i}.$$

$$\boxed{\sum \frac{1}{p_i} - \ln(\ln(n))_{n \rightarrow \infty} = Cte} \quad (15)$$

La constante d'Euler

- ① $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ou $u_n = \frac{1}{n}$ converge vers zéro.
- ② Comme $\{1, \dots, n_{+\infty}\}$ forme un tout achevé.
- ③ On a donc $u_{n_{+\infty}} = 0$ qui est le symétrique de $n_{+\infty}$. On peut étiqueter les éléments d'un continu avec l'ensemble des parties de u_n .
- ④ Si ζ est rationnel alors ζ est constructible et $\zeta - \sum_{i=1}^{n_{+\infty}} \frac{1}{i}$ est constructible en un nombre infini dénombrable d'étapes.
- ⑤ Donc $\ln(n_{+\infty})$ est constructible en un nombre infini dénombrable d'étapes, par une suite de droites seules.
- ⑥ Soit, dans le cadre de l'infini potentiel, \ln tendrait vers une asymptote formée par une droite, parallèle à $x'Ox$. Ce qui est impossible
- ⑦ ζ ne peut être rationnelle.

Résultats sur des séries de fonctions ζ entières dans le cadre de l'infini achevé

$$\left(\sum_{k=1}^{n_{+\infty}} \frac{(-1)^{k-1} (2\pi)^{2k}}{2(2k)!} B_{2k} \right) = \frac{3}{4} + n_{+\infty} \quad (16)$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n_{+\infty}} \zeta(2k+1) \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2n_{+\infty}+2} + n_{+\infty} \quad (17)$$

Autres résultats sur des séries de fonctions ζ entières dans le cadre de l'infini potentiel

$$\lim(\sum_{k=1}^n \zeta(2k+1))_{n \rightarrow +\infty} = \frac{1}{4} + \lim(n)_{n \rightarrow +\infty} \quad (18)$$

$$\lim(\sum_{k=2}^{2n} \frac{\zeta(k)}{n})_{n \rightarrow +\infty} = 2 \quad (19)$$

$$\lim(\sum_{k=2}^{2n} (-1)^k \zeta(k))_{n \rightarrow +\infty} = \frac{1}{2} \quad (20)$$

$$S_n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

En 1713, Leibnitz attribuait à cette série le résultat $\frac{1}{2}$ par un prolongement analytique : pour

$$|x| < 1, f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \rightarrow \frac{1}{1-x}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n+\infty} (-1)^{k+1} k, \text{ alors il vient :}$$

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+\infty} (-1)^{k+1} k = \sum_{k=1}^{n+\infty} k - \sum_{k=1}^{n+\infty} k = 0.$$

$$S_n = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots$$

Leibnitz attribuait à cette série le résultat $\frac{1}{4}$, toujours par la méthode du un prolongement analytique : pour $|x| < 1$, $f(x) = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots \rightarrow \frac{1}{(1+x)^2}$. Se pose ici l'impossibilité possibilité d'épuiser tous les coefficients du polynôme.

Cependant

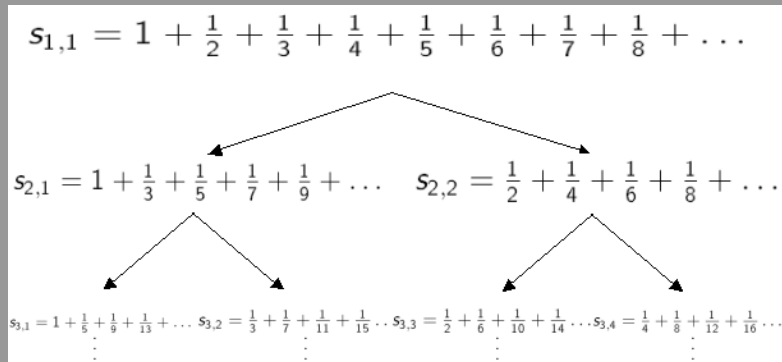
$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+\infty} (-1)^{k+1} k = - \sum_{k=1}^{n+\infty} 2k + \sum_{k=1}^{n+\infty-1} (2k+1).$$

$$\text{Soit } S'_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+\infty} k = \sum_{k=1}^{n+\infty} 2k + \sum_{k=1}^{n+\infty-1} (2k+1) \Rightarrow \\ \sum_{k=1}^{n+\infty-1} (2k+1) = \sum_{k=1}^{2n+\infty} k - \sum_{k=1}^{n+\infty} 2k.$$

On déduit alors :

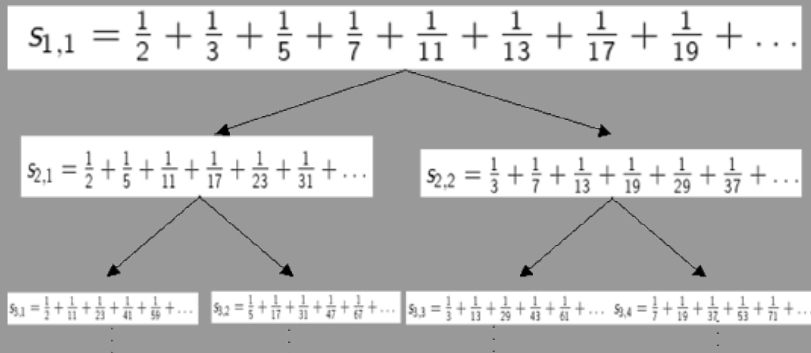
$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+\infty} k - 4 \sum_{k=1}^{n+\infty} k = \left(\frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{4n(n+1)}{2} \right)_{n+\infty} = -n_{+\infty}.$$

Arborescence de séries



On est conduit à un paradoxe entre les résultats par une relation de récurrence et ceux obtenus par le passage à la limite : Série croissante et majorée donc convergente.

Arborescence de séries



Mêmes Conclusions...

Divergence d'une série

La convergence asymptotique est bien plus forte que la notion de divergence. On peut lier la première à un nombre qui n'est pas infini (dans le sens que l'ensemble cardinal qu'il représente ne peut générer un continu avec l'ensemble de ses parties), mais qui n'est pas non plus fini dans le sens usuel (auquel cas la série convergerait).

Ces nombres sont donc des nombres entiers d'une nouvelle espèce : des entiers finis inachevés.

Cette notion est très puissante, puisqu'elle solutionne le paradoxe précédent, tout en offrant de nouvelles perspectives de certains résultats (Nombres premiers par exemple)

La cohérence potentiel-achevé

Proposition

Si une suite convergente prend en l'infini (achevé) la valeur ℓ , alors dans le cadre de l'infini potentiel, cette suite converge vers ℓ et inversement.

On peut considérer que ce résultat est vrai si ℓ est fini ou représente une valeur asymptotique.