

Numbers

$\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{T}_{\mathbb{N}}, \mathbb{T}_{\mathbb{R}}$

Hugues GENVRIN

September 2025

Table of Contents

- 1 Rappel historique
- 2 Construction moderne des nombres
 - Natural Numbers $\mathbb{N}$
 - Construction de $\mathbb{R}$
- 3 Nouvelle construction des nombres
 - Natural Numbers $\mathbb{N}$
 - Real numbers : $\mathbb{R}$
 - Complex numbers $\mathbb{C}$
 - Complex numbers from Hamilton
 - The complex exponential
 - Transfinite numbers $\mathbb{T}_{\mathbb{N}}/\mathbb{T}_{\mathbb{R}}$
 - From Cantor to a new transfinite structure

RAPPELS HISTORIQUES

Que sont les nombres ?

- Les Chiffres
- Les entiers naturels
- Les entiers relatifs
- Les décimaux
- Les rationnels
- Les réels
- Les irrationnels
- Les transcendants
- Les imaginaires
- Les quaternions,
- Les types (double, float, integer, booléens...)
- Les ordinaux
- Les cardinaux
- Les transfinis
- ...

Les calculs pratiques

- Les babyloniens utilisèrent une base sexagésimale.
- Dès l'ère Égyptienne, les nombres ont servi à mesurer :
 - des champs, pour le paiement des impôts,
 - pour le calcul des volumes, des hauteurs des pyramides.
- La civilisation maya comptait en base 20.
- Les nombres décimaux émergent au XV siècle en Europe ; avec des applications en comptabilité.

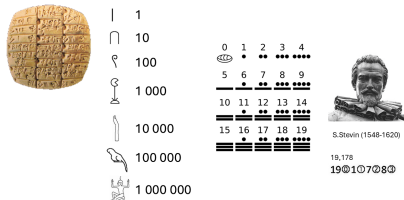


Figure – Calculs pratiques.

Les nombres et l'informatique



Figure – G.Boole (1815-1864).

Type	Définitions
Boolean	0-1
Char	$-128 \rightarrow 127$
Int	$-32\,768 \rightarrow 32\,767$
Long	$-2\,147\,483\,648 \rightarrow 2\,147\,483\,647$
Double	$-1.7 \times 10^E - 308 \rightarrow 1.7 \times 10^E + 308$

Origines du zéro

- Aristote rejetait le zéro tout comme l'infini achevé.
- Le zéro fut introduit par les Indiens au V^e siècle. On retrouve son usage et ses règles d'applications dans les écrits de Brahmagupta (VII^e), et c'est Bhaskara (VII^e) qui liera le premier le zéro à l'infini $\frac{1}{0} = \infty$.
- C'est Léonard de Pise qui l'introduira en Europe au XII^e siècle de retour d'Afrique du Nord.



Figure – Léonard de Pise (1170-1250).

Problème autour des rationnels

Definition

Nombre rationnel Un nombre x est rationnel s'il existe $p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $x = \frac{p}{q}$. Un nombre qui n'est pas rationnel est dit irrationnel.

Thalès pose les bases de la construction des nombres rationnels.

$$x = \frac{p}{q} \text{ car } \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

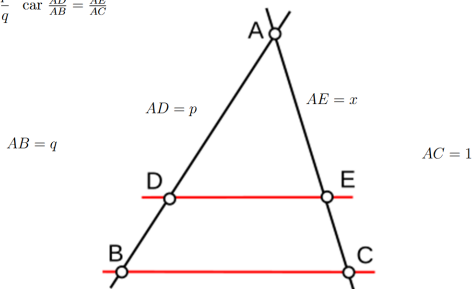


Figure – Construction des rationnels.

Problème autour des nombres constructibles

La duplication du cube :

Selon la légende rapportée par Eratosthène, la peste régnant à Délos, l'oracle d'Apollon déclara qu'il désirait un autel cubique double de l'existant pour faire cesser l'épidémie.

Cela revenait à construire (à la règle et au compas) le nombre $\sqrt[3]{2}$, ce n'est qu'en 1837 que la solution sera découverte par Wantzel (C'est impossible).

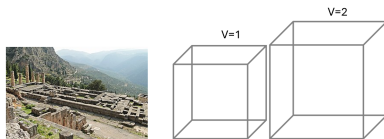
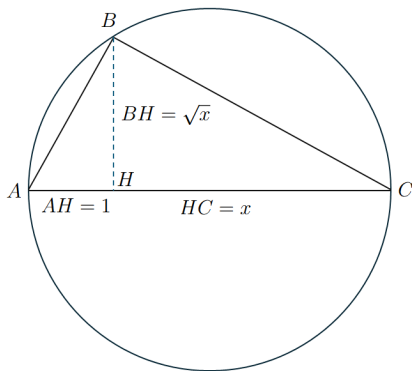


Figure – Construction des rationnels.

Problème autour des nombres constructibles

- Pour Archimède, un nombre existe s'il est constructible : π est incommensurable.
- Thalès donne la méthode pour construire à la règle et au compas de $\sqrt{x}$ (pour x constructible).



CONSTRUCTION MODERNE DES NOMBRES

« Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk »- Kronecker (1823-1891).

Axiomatic from Peano (1901)



Figure – G.Péano (1858-1932).

- ❶ Zero as 0 is a natural number.
- ❷ All natural numbers own a unique successor $S(n)$.
- ❸ 0 is not a successor.
- ❹ Two natural numbers which have the same successor are equal.
- ❺ if a set of natural numbers contains 0 and the successor of each of its elements, then this set is $\mathbb{N}$.
- ❻ It exists an infinite set - Zermelo (1908).

Historique de la construction de $\mathbb{R}$

La construction s'est faite successivement avec l'école allemande (Bolzano, Weierstrass, Cantor, Dedekind, Heine...) et l'école Française (Cauchy, Méray, Tannery,...)

- 1 En 1806 Weierstrass avait pris la direction de définir les irrationnels par l'existence de suites d'éléments convergents vers des valeurs finies non rationnelles.
- 2 En 1830 Méray s'appuya sur les suites de Cauchy pour définir les réels.
- 3 en 1872 Cantor reprit à son compte la méthode de Méray, et définit les irrationnels de manière formelle comme des limites de suites de Cauchy convergentes (vers des éléments nombres non rationnels). Il parla cependant de suite fondamentale, associées ces valeurs limites.

On appelle suite de Cauchy, une suite u_n telle que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 | \forall n > n_0 \wedge p > n_0, | u_n - u_p | < \epsilon.$$

NOUVELLE CONSTRUCTION DES NOMBRES

CONSTRUCTION DES NOMBRES

L'ordre des raisons est préféré à l'ordre des matières pour comprendre la progression de la construction des nombres.

Nous sommes dans le zéro :

- Par recalibrage,
- Par l'égalité entre toute restriction du plan et le zéro.



1. Puissance du continu,
2. Construction des entiers :
 1. ordinaux,
 2. cardinaux.
3. Infini en acte
 1. par une preuve expérimentale,
 2. par une théorie déductive.
4. Construction du continu linéaire :
 1. bon ordre,
 2. correspondance individus-grains et réels.
5. Construction des droites réelles.
6. Théorie des ensembles :
 1. individuation des réels,
 2. hypothèse du continu,
 3. fonction de choix,
 4. réflexivité.
7. Nombres transfinis
 1. entiers,
 2. réels.
8. Construction des nombres complexes par la méthode de Hamilton :
 1. dimension unitaire de la base,
 2. construction de l'exponentielle complexe,
 3. construction de l'imaginaire.

Figure – Plan des constructions des nombres.

Natural numbers $\mathbb{N}$

The infinite of ordinals are actuals



Figure – $\mathcal{F}_1$. Free fall experience.

We enumerate an ordinal chain, formed by the set of binary numbers (in b_2). We have $\omega = n_\infty$, and we are forming $2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^{n_\infty}$ elements. So we build a second ordinal chain with $\omega = 2^{n_\infty}$.

We observe that n_∞ is a Reny's information : $\mathcal{I}$. We can build with this quantity of information all the ordinals of $c' = [0; 1[$.

We update the set with an ordinal $\omega + 1$, because the set of the free fall is closed. Then we have a third ordinal chain, taken in the opposite sense.

The infinite of ordinals are actuals.

The unit path is actual

Let $\mathcal{F}_1$ a segment, closed. We can describe a unitary segment in a finite interval. We are covering all the grain from 0 to 1. Hence, $\mathbb{N} \cup T_{\mathbb{N}}$ is an actual whole. Thus, $\mathbb{N}$ is an actual whole.

The natural numbers $\mathbb{N}$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \bigcup \text{Pred}(1) & = \{0\}, & \# = 1. \\ \bigcup \text{Pred}(2) & = \{0, 1\}, & \# = 2. \\ \vdots & \\ \bigcup \text{Pred}(n_{\infty}) & = \{0, 1, \dots, n_{\infty} - 1\}, & \# = n_{\infty}. \end{array} \right.$$

Theorem (Cardinal of $\mathbb{N}$)

$$\#\mathbb{N} = n_{\infty}.$$

First construction of infinite segment by a variation of NA.

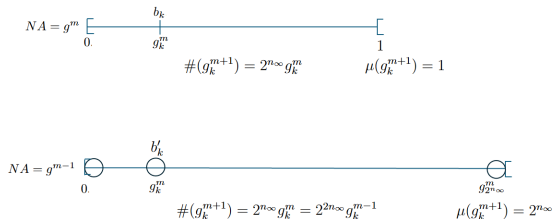


Figure – $\mathcal{F}$. Transformation

The real straight line

Second construction of real numbers

We notice that we extend the real axis up to $2^{n_{\infty}}$ with the grain g^{m-1} . As n_{∞} is a Reny's information, which sustains a set with $2^{n_{\infty}}$ elements g^m . In another point of view, we have a set with $2^{2n_{\infty}}$ elements g^{m-1} .

If we consider n_{∞} as a point of reference of infinite, as upper bound of real ; it's because n_{∞} is the lower bound of transfinite numbers.

In other hand, we have an open boundary in n_{∞} to figure the potential infinite.

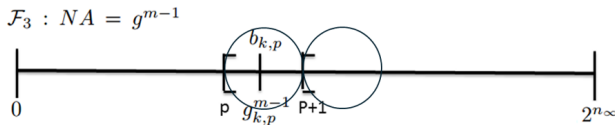


Figure – $\mathcal{F}_3$.

The real straight line

By this process, we are numbering all the grains $g_{k,p}^{m-1}$ of $\mathcal{F}_3$. We can represent the real straight line :

- $\delta = (-n_{\infty}; n_{\infty})$ as a restriction of $] - 2^{n_{\infty}}; 0] \cup [0; 2^{n_{\infty}}[$.
- or $] - 2^{n_{\infty}}; 0] \cup [0; 2^{n_{\infty}}[$ as a continuation of the straight line $\delta = (-n_{\infty}; n_{\infty})$.

Theorem

$$1 \cong 2^{n_{\infty}} \mod (NA = g^m \mapsto NA = g^{m-1})$$

Sumup

Construction of the real straightline

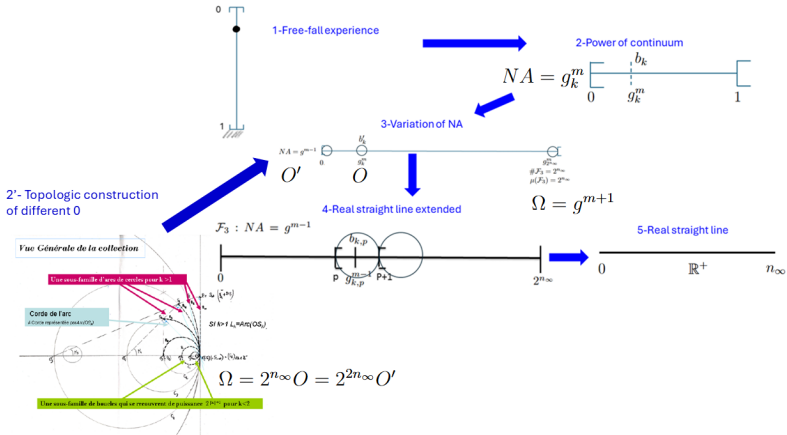


Figure – Construction.

CONSTRUCTION OF COMPLEX NUMBERS

Map from Hamilton :

$$\begin{cases} z.z' &= (x.x' - y.y', x.y' + x'.y) = z'.z, \\ z + z' &= (x + x', y + y') = z' + z. \end{cases}$$

Theorem

In the complex field, $\mathbb{C}$ every number can be written under the form :

$$z = \rho.e^{i(\theta+2k\pi)} = \rho \cos(\theta) + i\rho \sin(\theta) = a + ib.$$

$e^{i\theta}$ from the real exponential

Let the functional equation $z^2(\phi) = z(2\phi)$. The solution is $e^{\alpha\phi}$. So in the field $\mathbb{C}$, we consider the solution on $\mathcal{U}_1$, we have $e^{\alpha\phi^2} = \cos(2\phi) + i \sin(2\phi)$. With the derivation, and the case $\phi = 0$, we find $\alpha = i$.

Let $\theta = 2\phi$, then $ie^{i\theta} = i^2 \sin \theta + i \cos \theta$.

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

The $\aleph$

From Cantor to a new transfinite structure

Cantor introduced the transfinite numbers in 1883. He wrote that the cardinal of natural numbers was $\aleph_0$, and the cardinal of the continuum was $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$.

However we have proved that it exists all cardinal numbers between $n_{\infty} = \#\mathbb{N}$ and $2^{n_{\infty}} = \#\mathbb{R}$. So we have deduced that the continuum hypothesis is false.

We are defining $\mathbb{T}_{\mathbb{N}} = \{n_{\infty}; n_{\infty} + 1; \dots; 2^{n_{\infty}}\}$, and $\mathbb{T}_{\mathbb{R}} = \{n_{\infty}, 00\dots 0; \dots; (10^{n_{\infty}}, 11\dots 1) \text{ in } b_2\}$.

Thank you !

Backup

- 1 Rappel historique
- 2 Construction moderne des nombres
 - Natural Numbers $\mathbb{N}$
 - Construction de $\mathbb{R}$
- 3 Nouvelle construction des nombres
 - Natural Numbers $\mathbb{N}$
 - Real numbers : $\mathbb{R}$
 - Complex numbers $\mathbb{C}$
 - Complex numbers from Hamilton
 - The complex exponential
 - Transfinite numbers $\mathbb{T}_{\mathbb{N}}/\mathbb{T}_{\mathbb{R}}$
 - From Cantor to a new transfinite structure