

Intégration

Hugues Genvrin

Novembre 2024

Deux sujets

Initialement distincts puis liés

Le **calcul intégral** trouve son origine dans des problèmes géométriques :

- 1 Calcul d'aires de figures planes, de surfaces.
- 2 Calcul de longueur de lignes courbes.
- 3 Calcul de volumes.

Deux courants d'approches se présentent : la méthode d'exhaustion (développée par Eudoxe et Archimède) et le calcul des primitives initié par les mécaniciens (Galilée, Toricelli) et formalisé par Newton.

Le **calcul différentiel**, des fluxions ou dérivées remontent à Newton et Leibnitz, donc il est largement postérieur aux approches de l'intégration pas la méthode de l'exhaustion mais il précède immédiatement le calcul des primitives dans l'oeuvre de Newton, où ils sont inclus dans une approche analytique. Le calcul des dérivées de Newton sera repris par Maclaurin pour les développements des fonctions sous formes de séries.

Chronologie des différents apports

Auteur	Désignation	Période
Eudoxe	méthode d'exhaustion	III av. J.-C.
Archimède	méthode d'exhaustion améliorée	III av. J.-C.
Newton	Primitives	1660/1665
Leibnitz	Calcul différentiel	1684
Cauchy	Intégrale de Cauchy	
Riemann	Intégrale de Riemann	1854
Darboux	Intégrale de Darboux	
Stieltjes	Intégrale de densité	1894
Lebesgue	Intégrale de Lebesgue	1905
Denjoy-Perron	Intégrale de Denjoy	1912-1914
Kurzeil-Henstock	Intégrale de jauge	1957/1961
Genvrin	Intégrale transfinie	2008
Genvrin	Intégrale par les tangentes	2014

Intégrale de Darboux

On part de subdivisions élémentaires, monotones.

$$S_{\mathcal{D}+} = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \cdot \max(y(x_i), y(x_{i+1})) \in \mathcal{D}.$$

$$S_{\mathcal{D}-} = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \cdot \min(y(x_i), y(x_{i+1})) \in \mathcal{D}.$$

Avec $S_{\mathcal{D}+}(y(h_i)) = S_{\mathcal{D}-}(y(h'_i))$ lorsque le pas tend vers 0, qui est la valeur de l'intégrale de Riemann.

Intégrale de Riemann pointée

On part de subdivisions élémentaires, monotones. Si $\forall \epsilon > 0$ avec $h_i \in]x_i; x_{i+1}[$, $\exists A$, tel que

$$|S_{\mathcal{D}}(h_i) - A| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \cdot y(h_i) - A \right| < \epsilon$$

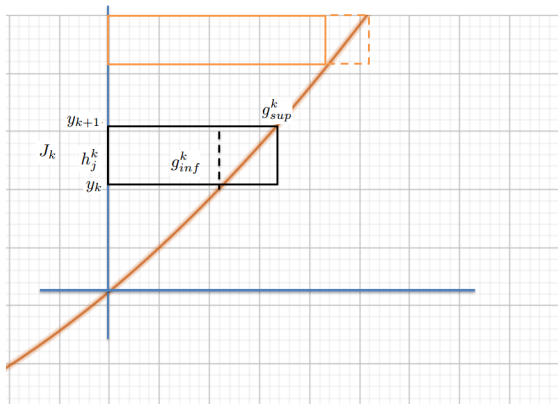
.
Alors lorsque le pas tend vers 0, $S_{\mathcal{D}}(h_i) = A$ est la valeur de l'intégrale de Riemann.

Intégrale de Jauge ou de Kurzweil-Henstock

On part de subdivisions élémentaires. Soit δ_i tel que $(x_{i+1} - x_i) \leq \delta_i$, et $f|_{[x_i, x_{i+1}]}$ monotone sur cet intervalle. Soit $h_i \in]x_i, x_{i+1}[$.

$S_{\mathcal{D}} = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \cdot y(h_i)$. Si $\forall \epsilon > 0, S_{\mathcal{D}} < \epsilon$, δ_i forme une jauge.

Si $\delta_{K_i} \rightarrow 0$, $S_{\mathcal{D}}$ est la valeur de l'intégrale de Jauge.



L'intégrale de Stieltjes

« Soit J une subdivision de l'intervalle $I = [t_0; t_n]$ pointée par une suite d'éléments (h_i) , qu'on note (J, h) et qui forme une partition de I . Soit α une fonction croissante sur $[t_0; t_n]$, on pose $\Delta(\alpha_i) = \alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)$ tel que $(1 \leq i < n)$, on appellera $\max [\Delta(\alpha_i); J]$ le pas de la subdivision. On notera la subdivision pointée :

$$\mathcal{D} = \{[\alpha(t_i); \alpha(t_{i+1}), h_i \in [t_i; t_{i+1}]\}$$

« On notera que $h_i \in [t_i; t_{i+1}] \Leftrightarrow \alpha(h_i) \in [\alpha(t_i); \alpha(t_{i+1})]$. On considère alors une fonction y définie entre ses bornes. On construit alors la somme de Riemann de notre fonction : $S_{\mathcal{D}}(y) = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta(\alpha_i) \times \alpha(h_i)$.

L'intégrale de Stieltjes

On dira alors que y est intégrable au sens de Stieltjes s'il existe un réel A tel que pour tout $\epsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ en sorte que $\mathcal{D}$ soit une subdivision de pas inférieur à δ , alors $|S_{\mathcal{D}}(y) - A| \leq \epsilon$. A sera alors appelée l'intégrale de Stieltjes et notée $\int y d\alpha = \int y(x) d(\alpha(x))$. »

L'intégrale de Lebesgue (1)

Fonctions mesurables

Tribu

Soit E un ensemble, on appelle tribu borélienne sur E , toute famille $\mathcal{E}'$ de parties de E vérifiant :

- 1 $\emptyset \in \mathcal{E}'$,
- 2 si $\widehat{E} \in \mathcal{E}'$ alors $\widehat{\widehat{E}} \in \mathcal{E}'$,
- 3 si $(E_i)_{i \geq 1}$ alors $\bigcup A_i \in \mathcal{E}'$.

Le couple $(E, \mathcal{E}')$ est appelé espace mesurable.

Fonction mesurable

Soient $(E, \mathcal{E}')$ et $(F, \mathcal{F}')$ deux espaces mesurables. Une fonction $\alpha : (E, \mathcal{E}') \rightarrow (F, \mathcal{F}')$ est $(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ -mesurable (ou plus simplement mesurable) si :

$$\forall F' \in \mathcal{F}, \alpha^{-1}(F') \in \mathcal{A}.$$

Intégrale transfinie (1/3)

On considère une fonction continue sur $[a; b]$, on construit une subdivision de pas $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ avec $x_0 = a$ et $x_n = b$.

On pose $Sup = \sup f(x)$ où $x \in [x_{i-1}; x_i]$ et $Inf = \inf f(x)$ où $x \in [x_{i-1}; x_i]$, alors on définit $I_n^+ = \left\{ \sum_{i=1}^n Sup \times \Delta x \right\}_{n \rightarrow +\infty}$ et

$$I_n^- = \left\{ \sum_{i=1}^n Inf \times \Delta x \right\}_{n \rightarrow +\infty}.$$

On dit que f est intégrable au sens de Riemann si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n^+ = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n^-, \text{ et alors on pose}$$

$$I = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n^+ = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n^- = \int_a^b f(x) dx.$$

Considérons un cas particulier de subdivision : $x_{i+1} = \frac{b-a}{n} + x_i$, avec $x_1 = a$. On suppose f strictement décroissante et $b - a = 1$, alors

$$x_i = \frac{i}{n} + a.$$

Intégrale transfinie (2/3)

Soit $I_n^+ = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} f(a + \frac{i-1}{n}) = \sum_{i=na}^{n(a+1)-1} \frac{1}{n} f(\frac{i}{n})$, de même

$$I_n^- = \sum_{i=na+1}^{n(a+1)} \frac{1}{n} f(\frac{i}{n}).$$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n^+ - \frac{1}{n} f(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n^- - \frac{1}{n} f(a+1)$, comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a) \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a+1) \frac{1}{n} = 0 \text{ alors}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n^+ = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n^- \implies \int_a^{a+1} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=na}^{n(a+1)} \frac{1}{n} f(\frac{k}{n}).$$

Intégrale transfinie (3/3)

On sait qu'il existe $n_{+\infty}$ qui est le cardinal de $\mathbb{N}$ et qu'il existe des nombres entiers transfinis qui s'étendent au-delà des nombres entiers par adjonction d'une unité. Or $\int_a^{a+1} f(x)dx$ est une valeur finie, pas seulement une limite, la somme convergeant, on peut passer à une série de termes achevée, le résultat est donc valable dans le cadre de l'infini potentiel et celui de l'infini achevé.

On a donc $\int_a^{a+1} f(x)dx = \sum_{k=na}^{n(a+1)} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ pour $n = n_{+\infty}$. Dans ce cas on a une représentation de l'aire comme somme de termes transfinis.

Si f avait été croissante sur $[a; a+1]$ par un raisonnement analogue on aurait eu : $\int_a^{a+1} f(x)dx = \sum_{k=na}^{n(a+1)} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ pour $n = n_{+\infty}$.

Intégrale impropre (1/2)

Soit une fonction :

$$\begin{aligned} f &: E \rightarrow F \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Où E et F pourront être égaux à $\mathbb{R}$. Alors la réciproque de f , notée f^{-1} , et telle que $f^{-1} \circ f = id$ alors, on définit.

$$\begin{aligned} f^{-1} &: F \rightarrow E \\ y &\mapsto f^{-1}(y) \end{aligned}$$

Soit une subdivision élémentaire de E et F . $E = \cup_k I_k = \cup_k [x_{inf}^k; x_{sup}^k[$ et une subdivision de $F = \cup_k J_k = \cup_k [y_{inf}^k; y_{sup}^k[$.

Intégrale impropre (2/2)

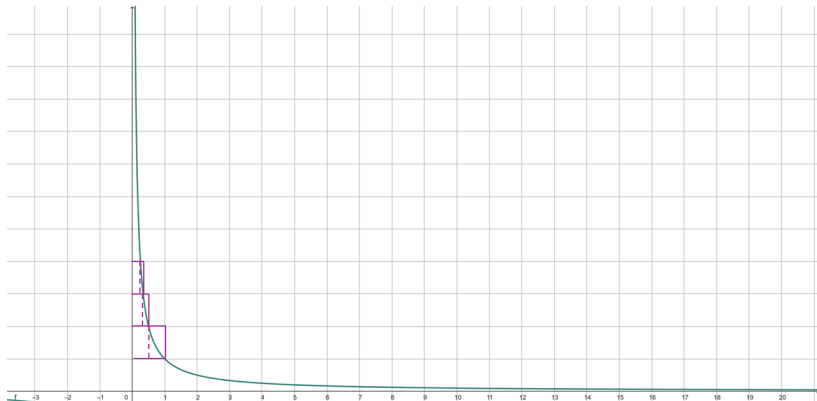


Figure – Intégration de Riemann sur l'axe $(y'Oy)$.

Un exemple d'intégrale impropre résoluble (1/2)

Soit l'intégrale $I = \int_k^{k+1} \frac{dx}{x}$, où $k \geq 1$. Alors

$$I = [\ln x]_k^{k+1} = \ln(k+1) - \ln(k) = \ln\left(\frac{1}{k}\right) - \ln\left(\frac{1}{k+1}\right) = [\ln x]_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}}.$$

Par un prolongement de la fonction $\ln$ à des valeurs inférieures à l'unité, on a $I = \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{x}$.

Theorem

Pour $k \geq 1$, $\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{x}$.

Un exemple d'intégrale impropre résoluble (2/2)

Corollaire

$\int_0^1 \frac{dx}{x}$ existe. C'est un prolongement de la fonction $x \mapsto \ln x$. On a :

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \ln(n_\infty)$$

La fonction de Weierstrass

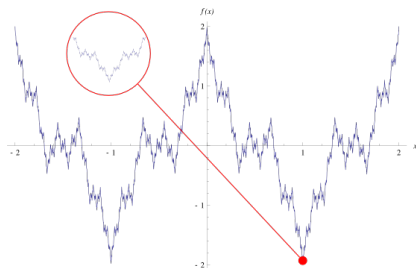


Figure – Intégration de la fonction $f_{a,b}(x) = \sum_{i=1}^{n_{\infty}} a_i \cos(b_i \pi x)$

Taux de croissance

Definition (Taux de croissance différentiel)

On appelle taux de croissance différentiel en x sur dx unités la valeur

$$\tau_{/y,dx} = \frac{/y(x+dx) - /y(x)}{/y(x)}.$$

Compte-tenu que $/y(x) = y'(x)$ alors $\tau_{/y,dx} = \frac{/y(x+dx)}{y'(x)} - 1$. On remarque que le taux de croissance différentiel sera la différentielle du logarithme naturel de la fonction d'après les calculs réalisés plus haut.

Definition (Taux de croissance fonctionnel)

On appelle taux de croissance fonctionnel en x sur dx unités la valeur

$$\tau_{y,dx} = \frac{y(x+dx) - y(x)}{y(x)}.$$

Bien entendu ces taux ne sont pas définis en $y(x) = 0$. A partir de ces notions nous présentons une nouvelle définition de la différentielle : La différentielle d'une fonction y en x est égal au produit de $y'(x)$ par la différence des taux de croissance fonctionnel et différentiel sur l'accroissement dx .

Convexité et Concavité

	Convexité	Concavité
N	$\tau_{/y,dx} < \tau_{y,dx}$	$\tau_{/y,dx} > \tau_{y,dx}$
S	$\tau_{/y,dx} > \tau_{y,dx}$	$\tau_{/y,dx} < \tau_{y,dx}$

Calcul de l'intégrale par les tangentes

Soit J une subdivision infinitésimale de l'intervalle $I = [x_0; x_n]$ pointée par une suite d'éléments (h_i) et (h'_i) , qu'on note (J) et qui forme donc une partition de I . Supposons que le point M parcourt le graphe fonctionnel $\mathcal{G}$ entre $M_0(x_0; y(x_0))$ et $M_n(x_n; y(x_n))$

Hypothèses

- 1 le graphe fonctionnel y soit de convexité homogène,
- 2 la fonction y soit monotone,
- 3 le graphe fonctionnel admette une tangente en x_i , autrement dit y soit dérivable en x_i .

L'aire $\mathcal{A}$ définie par $\mathcal{G} \cap \mathcal{S}(D_i; D_{i+1})$

Cette surface va être délimitée par la courbe et une bande représentant un pas, on peut la décomposer en trois sous-aires élémentaires :

- 1 $\mathcal{A}_1$: aire du rectangle (M_i, N_i, D_{i+1}, D_i) .
- 2 $\mathcal{A}_2$: aire d'un triangle rectangle formé un morceau de tangente comme hypoténuse, un segment parallèle au support du pas, un segment vertical, qu'on identifie à (M_i, P_i, M_{i+1}) .
- 3 $\mathcal{A}_3$: aire résiduelle formée par une surface plus complexe (deux segments et un morceau de courbe qui forment un triangle hyperbolique) identifiée à (P_i, M_i, M_{i+1}) où $\mathcal{G} \cap \mathcal{S}(D_i; D_{i+1})$ est le chemin qui conduit de M_i à M_{i+1} .

Exemple

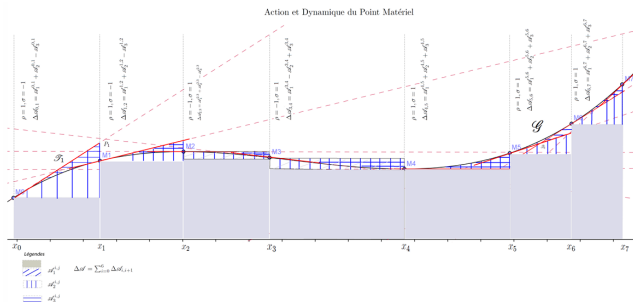


Figure – Division de la fonction en pas de convexité homogène, à partir de la quelle on subdivise en pas infinitésimaux pour intégrer.

On aura donc quatre cas différents de calcul des aires par décomposition en surfaces élémentaires : $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$.