

Une théorie de la mesure du grain

Mesures positives, orientées et sommatoires sur un niveau de résolution
— cours

Hugues Genvrin

Septembre 2026

Présentation du cours

La question directrice

*Peut-on définir rigoureusement une **mesure sommatoire nulle** à partir de deux mesures orientées en sens inverse, prises sur un **même niveau de résolution** ? En quel sens cette mesure nulle s'identifie-t-elle à un **grain infinitésimal** ?*

La réponse, en deux temps

1. Deux mesures orientées opposées sur une grille commune se compensent **exactement** : c'est le zéro exact.
2. Le grain n'est pas ce zéro : c'est un zéro **infinitésimal**. La promotion les confond : le grain est **équivalent** à la mesure nulle, sans lui être égal.

Organisation : partie I rigoureuse (sections 2 à 6), partie II exploratoire (sections 7 à 9).

Plan

Rappels : la mesure dans *Théorie du grain*

Le niveau de résolution comme algèbre

Mesure positive, mesure orientée

Mesure sommatoire et compensation exacte

Trois zéros

Promotion : vers les mesures de Radon

Familles de niveaux : une filtration

Grains déformés : le jacobien

Le repliement fabrique le zéro sommatoire

Synthèse

Rappels : la mesure dans *Théorie du grain*

Ce que le livre contient déjà

- **Chap. 10** : le cercle unité de circonférence **1** se factorise
 - à la résolution $-n_\infty$ en 2^{n_∞} grains de mesure 2^{-n_∞} (prop. 52) ;
 - à la résolution $-2n_\infty$ en 2^{2n_∞} sous-grains, chaque grain grossier en contenant 2^{n_∞} (prop. 53).
- **Th. 53** : « passage de mesure nulle à mesure non nulle ». La mesure 2^{-n_∞} est **conservée**, son **statut** change.
- **Chap. 4** : intégrale stratifiée (déf. 42), somme de Riemann sur la mosaïque fine, compatible avec l'intégrale classique (th. 25).
- **Déf. 88, rem. 121** : un grain n'est pas un zéro, c'est un infinitésimal stratifié ; « zéro épais » est un oxymore.

Objectif du cours

Organiser ces éléments en une théorie de la mesure, dans l'ordre : **positive** → **orientée** → **sommatoire**.

Un pont qui a des précédents

- Depuis **Loeb (1975)**, l'analyse non standard sait fabriquer des mesures standard à partir de mesures hyperfinies.
- Cette construction demande un axiome, la **saturation**, qui ne figure pas dans l'axiomatique du livre (transfert « à la Łoś », chap. 5).

Choix du cours

Toute la partie I est démontrée **sans** saturation : le passage au standard se fait par le **théorème de représentation de Riesz**. Le cadre de Loeb est présenté comme une option (section 6).

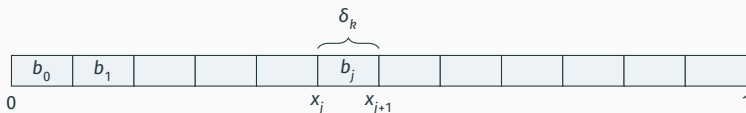
Le niveau de résolution comme algèbre

Grains et grille

On travaille sur $X = [0, 1[$, le cercle unité déroulé (déf. 77). Pour $k \geq 1$:

$$N_k = 2^{kn_\infty}, \quad \delta_k = 2^{-kn_\infty} = \frac{1}{N_k}, \quad x_j = j \delta_k, \quad b_j = [x_j, x_{j+1}[\quad (0 \leq j < N_k).$$

- Les grains $b_0, \dots, b_{N_k-1}$ forment une **partition hyperfinie** de X .
- Leur épaisseur commune δ_k est un infinitésimal **non nul**.
- Si le niveau doit être précisé : $x_j^{(k)}, b_j^{(k)}$.



Quelles parties sont « visibles » au niveau ?

Une partie visible au niveau k est une **réunion de grains**. Mais on ne peut pas prendre n'importe quelle famille d'indices : sinon les cardinaux, donc les mesures, ne seraient plus des éléments de $\tilde{\mathbb{R}}$.

Hypothèse 1 (Admissibilité)

On dispose d'une famille $\mathcal{S}_k$ de parties **admissibles** de $\{0, \dots, N_k - 1\}$:

- contenant les singletons et les intervalles d'entiers ;
 - stable par complémentaire, intersection, réunion finie ;
 - chaque S a un cardinal $\#S \in \{0, \dots, N_k\}$, additif.
-
- En analyse non standard : les parties **internes**.
 - Dans le livre : les parties décrites par des indicatrices admissibles (déf. 41).

Définition 2 (Algèbre du niveau k)

$B_S = \bigcup_{j \in S} b_j$ pour $S \in \mathcal{S}_k$, et $\mathcal{A}_k = \{B_S : S \in \mathcal{S}_k\}$.

Proposition 3

$\mathcal{A}_k$ est une algèbre de Boole de parties de X , dont les atomes sont exactement les grains. $S \mapsto B_S$ est un isomorphisme d'algèbres de Boole.

Preuve.

- Les grains sont disjoints et recouvrent X : $X \setminus B_S = B_{S^c}$, $B_S \cap B_T = B_{S \cap T}$, $B_S \cup B_T = B_{S \cup T}$.
- Injectivité : deux ensembles d'indices distincts diffèrent par un grain entier, non vide.
- Un élément non vide contient un grain ; un grain ne contient aucun autre élément non vide de $\mathcal{A}_k$. □

Algèbre ou tribu ?

- Une **tribu** est stable par réunion **dénombrable**.
- $\mathcal{A}_k$ est stable par réunion **hyperfinie** admissible, mais pas par réunion dénombrable au sens externe.

Exemple 4

La réunion des grains b_j d'indice j *standard* (les points à un nombre standard de grains de 0) n'est pas de la forme B_S . Sinon l'ensemble des entiers standard serait admissible, et il aurait un plus grand élément.

Terme juste : algèbre hyperfinie (« tribu interne »)

Ce n'est pas une faiblesse : c'est ce qui permet de **calculer exactement, grain par grain**. Le passage au dénombrable sera l'affaire de la **promotion**.

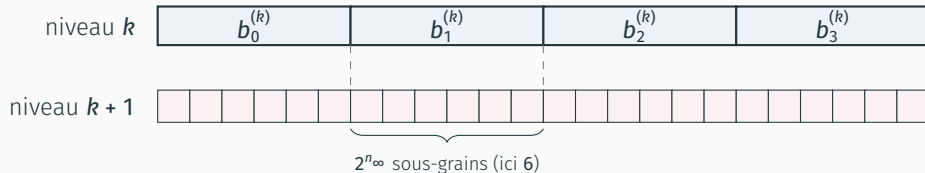
L'emboîtement des niveaux

Proposition 5 (Emboîtement)

Chaque grain du niveau k est la réunion disjointe de 2^{n_∞} grains du niveau $k + 1$:

$$b_j^{(k)} = \bigcup_{\ell=0}^{2^{n_\infty}-1} b_{j2^{n_\infty}+\ell}^{(k+1)} \quad \text{donc} \quad \mathcal{A}_k \subset \mathcal{A}_{k+1}.$$

Preuve. $\delta_k = 2^{n_\infty} \delta_{k+1}$ donne $x_j^{(k)} = x_{j2^{n_\infty}}^{(k+1)}$. C'est la prop. 53 du livre. □



Mesure positive, mesure orientée

Définition 6 (Mesure de niveau)

$$\mu_k : \mathcal{A}_k \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}, \quad \mu_k(B_S) = \delta_k \cdot \#S.$$

Plus généralement, une **mesure positive de niveau k** est une application additive $m : \mathcal{A}_k \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}_{\geq 0}$; elle est déterminée par ses **poids** $m_j = m(b_j) : m(B_S) = \sum_{j \in S} m_j$.

Proposition 7 (Propriétés de μ_k)

1. μ_k est additive, $\mu_k(X) = 1$, $\mu_k(b_j) = \delta_k$.
2. Si $a = x_p \leq b = x_q : \mu_k([a, b[) = b - a$ (c'est la longueur).
3. **Compatibilité** : μ_{k+1} restreinte à $\mathcal{A}_k$ est μ_k (version mesurée du th. 53 du livre).

Preuve. Point 3 : B_S est, au niveau $k+1$, la réunion de $2^{n_\infty} \#S$ grains fins, de mesure $2^{n_\infty} \#S \delta_{k+1} = \#S \delta_k$. □

Radon–Nikodym au niveau : une division

Proposition 8 (Radon–Nikodym au niveau)

Toute mesure positive m de niveau k s'écrit de manière unique

$$m(B_S) = \sum_{j \in S} \rho_j \mu_k(b_j), \quad \rho_j = \frac{m_j}{\delta_k}.$$

La famille $\rho = (\rho_j)$ est la **densité** de m par rapport à μ_k .

Preuve. chaque atome a une mesure $\delta_k \neq 0$: on divise. □

Ce que le grain apporte

Classiquement, Radon–Nikodym demande l'absolue continuité et une vraie démonstration. Au niveau, **aucun ensemble non vide n'est de mesure nulle** : le théorème est une division. Les ensembles non vides de mesure nulle n'apparaîtront qu'à la **promotion**.

Définition 9 (Mesure orientée de niveau)

Une application additive $\nu : \mathcal{A}_k \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$, de signe quelconque, déterminée par ses poids $c_j = \nu(b_j)$. On note $\mathcal{M}_k \simeq \tilde{\mathbb{R}}^{N_k}$ l'ensemble de ces mesures.

- Le signe de c_j est l'**orientation** du grain b_j .
- **Grain orienté** $\pm g_j$: g_j a le poids δ_k sur b_j , 0 ailleurs.

Définition 10 (Segment orienté)

Pour $a = x_p$, $b = x_q$: $[a \rightarrow b] = \sum_{p \leq j < q} g_j$ si $p \leq q$, et $[a \rightarrow b] = -\sum_{q \leq j < p} g_j$ sinon.

Proposition 11 (Chasles au niveau)

$[a \rightarrow b] + [b \rightarrow c] = [a \rightarrow c]$ et $[b \rightarrow a] = -[a \rightarrow b]$, **exactement**, grain par grain.

Décomposition de Jordan au niveau

Proposition 12 (Jordan et Hahn)

Toute $v \in \mathcal{M}_k$ s'écrit $v = v^+ - v^-$ avec $v^+(b_j) = \max(c_j, 0)$, $v^-(b_j) = \max(-c_j, 0)$. C'est l'unique écriture $v = m_1 - m_2$ ($m_i \geq 0$) qui minimise $m_1 + m_2$.

- Variation totale : $|v| = v^+ + v^-$, de poids $|c_j|$.
- Ensemble de Hahn : $P = \bigcup_{c_j > 0} b_j$.

Preuve. Grain par grain : $c_j = m_{1,j} - m_{2,j}$ avec $m_{1,j}, m_{2,j} \geq 0$ entraîne $m_{1,j} + m_{2,j} \geq |c_j|$, avec égalité si et seulement si l'un des deux poids est nul, soit $(m_{1,j}, m_{2,j}) = (c_j^+, c_j^-)$. $\square$

(On admet que $\{j : c_j > 0\}$ est admissible, ce qui est vrai pour les parties internes.)

Mesure sommatoire et compensation exacte

Définition 13 (Mesure sommatoire)

Une somme $\sum_{i \in I} v_i$ de mesures orientées du même niveau, indexée par une famille hyperfinie admissible. Poids : $\sum_i c_{i,j}$ sur b_j .

C'est encore un élément de $\mathcal{M}_k$; la différence est de lecture : elle garde la trace de ses composantes, ce qui permet de parler de compensation.

Théorème 14 (Compensation exacte)

Si v' est la mesure orientée en sens inverse de v (poids $-c_j$), alors

$$(v + v')(b_j) = 0 \quad \text{pour tout } j.$$

En particulier $[a \rightarrow b] + [b \rightarrow a] = 0$.

Preuve. $c_j + (-c_j) = 0$ dans $\tilde{\mathbb{R}}$, et une somme hyperfinie de zéros est nulle. □

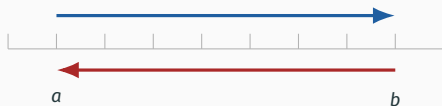
Tout est dans l'hypothèse : une grille commune

Proposition 15 (Grilles décalées)

$a < b$ sur la grille, $a' = a + s$, $b' = b + s'$, $0 < s, s' < \delta_k$. Sur l'algèbre engendrée, avec la mesure de longueur :

$$[a \rightarrow b] + [b' \rightarrow a'] \neq 0, \quad |[a \rightarrow b] + [b' \rightarrow a']|(X) = s + s' \leq 2\delta_k.$$

Preuve. compensation sur $[a', b]$; il reste $+s$ sur $[a, a']$ et $-s'$ sur $[b, b']$. □



grille commune :
somme = 0 exactement



grilles décalées :
reste $s + s' \leq 2\delta_k$

Le sens exact de « même niveau »

- La condition « mesures prises sur un même niveau de résolution » est **exactement** ce qu'il faut pour la compensation exacte.
- Plus précisément, ce qu'il faut, c'est une **grille commune**.

Même famille dyadique

Deux niveaux $k < k'$ ont toujours une grille commune : la plus fine ($\mathcal{A}_k \subset \mathcal{A}_{k'}$). La condition n'est pas restrictive dans la tour $-kn_\infty$.

Grilles décalées

Décalées d'une fraction de grain, deux grilles n'ont pas de grille commune : compensation seulement **infinitésimale**.

Trois zéros

L'intégrale stratifiée contre une mesure orientée

Pour $\nu \in \mathcal{M}_k$ et φ définie sur la grille :

$$\langle \varphi, \nu \rangle = \sum_{j=0}^{N_k-1} \varphi(x_j) c_j$$

(pour $\nu = \mu_k$: la déf. 42 du livre).

Lemme 16 (Continuité à l'échelle du grain)

Si φ est standard et continue sur $[0, 1]$, alors $\omega_\varphi(\delta_k) = \max_{|x-y| \leq \delta_k} |\varphi(x) - \varphi(y)|$ est **infinitésimal**.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$ standard. Par continuité uniforme, il existe $\eta > 0$ standard avec $|x - y| \leq \eta \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \varepsilon$, et cet énoncé se transfère à $\tilde{\mathbb{R}}$. Comme $\delta_k < \eta$, $\omega_\varphi(\delta_k) \leq \varepsilon$, pour tout ε standard. □

Définition 17 (Trois zéros)

Une mesure orientée $\nu \in \mathcal{M}_k$ est

1. un **zéro exact** si $c_j = 0$ pour tout j ;
2. un **zéro infinitésimal** si $|\nu|(X) \approx 0$ (ils forment la **monade** $\mathfrak{M}(0)$) ;
3. un **zéro faible** si $|\nu|(X)$ est limitée et $\langle \varphi, \nu \rangle \approx 0$ pour toute φ standard continue.

Proposition 18 (Hiérarchie stricte)

exact $\Rightarrow$ infinitésimal $\Rightarrow$ faible, et strictement :

1. le **grain** g_j est un zéro infinitésimal non nul ;
2. la **paire opposée** $D_{j+1} - D_j$ (D_j : poids 1 sur b_j) est un zéro faible, de variation 2 ;
3. le **tapis alterné** τ_k (poids $(-1)^j \delta_k$) est un zéro faible, de variation 1.

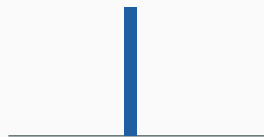
Preuve de la hiérarchie

- Infinitésimal $\Rightarrow$ faible : $|\langle \varphi, v \rangle| \leq \max |\varphi| \cdot |v|(X)$, standard fois infinitésimal.
- Point 1 : $|g_j|(X) = \delta_k$, infinitésimal et non nul.
- Point 2 : $\langle \varphi, D_{j+1} - D_j \rangle = \varphi(x_{j+1}) - \varphi(x_j) \approx 0$ par le lemme ; variation 2.
- Point 3 : $|\tau_k|(X) = N_k \delta_k = 1$. Comme N_k est pair, on groupe par paires :

$$\langle \varphi, \tau_k \rangle = \delta_k \sum_{m=0}^{N_k/2-1} (\varphi(x_{2m}) - \varphi(x_{2m+1})),$$

$$|\langle \varphi, \tau_k \rangle| \leq \delta_k \cdot \frac{N_k}{2} \cdot \omega_\varphi(\delta_k) = \frac{1}{2} \omega_\varphi(\delta_k) \approx 0. \quad \square$$

Dirac, anti-Dirac, dipôle



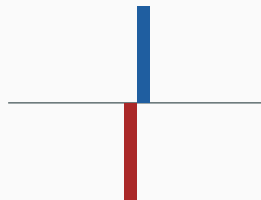
Dirac D_j

masse 1 sur un grain



tapis alterné τ_k

masse 1 étalée, somme nulle



paire $D_{j+1} - D_j$

deux masses opposées

- Le tapis alterné est un **anti-Dirac** : étalement maximal, de somme nulle (cf. *Plan complexe et grain nul*).
- Le dipôle renormalisé $(D_{j+1} - D_j)/\delta_k$ a une variation $2/\delta_k$ **illimitée** : $\langle \varphi, \cdot \rangle \approx \varphi'(\text{st } x_j)$, il agit comme $-\delta'_{\text{st } x_j}$. Au-delà de la variation limitée : les **distributions**.

Promotion : vers les mesures de Radon

Le théorème de promotion

Théorème 19 (Promotion d'une mesure orientée)

Soit $\nu \in \mathcal{M}_k$ de variation totale limitée. Il existe une unique mesure de Radon signée standard $\text{st}_* \nu$ sur $[0, 1]$ telle que, pour toute φ standard continue,

$$\int_{[0,1]} \varphi d(\text{st}_* \nu) = \text{st}\langle \varphi, \nu \rangle.$$

st_* est additive, positive, et $\|\text{st}_* \nu\| \leq \text{st}|\nu|(X)$.

Preuve.

- $|\langle \varphi, \nu \rangle| \leq \|\varphi\|_\infty |\nu|(X)$ est limité : $\Lambda(\varphi) = \text{st}\langle \varphi, \nu \rangle$ est un réel.
- st est additive et multiplicative sur les limites ($\mathbb{R} = \tilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}/\mathfrak{m}$) : Λ est linéaire et bornée sur $C([0, 1])$.
- Théorème de **Riesz** : $\Lambda(\varphi) = \int \varphi dm$ pour une unique mesure de Radon m . □

Pourquoi ce théorème compte

Aucune saturation requise

Le passage au dénombrable, que l'algèbre du niveau ne permet pas, est entièrement pris en charge par le théorème de Riesz, **du côté standard**.



La promotion des mesures est l'exact analogue de la promotion des nombres : elle **fabrique** l'objet standard à partir d'un objet de niveau.

Proposition 20 (Exemples)

1. $\text{st}_* \mu_k = \lambda$, la mesure de Lebesgue, pour tout niveau k .
2. $\text{st}_* D_j = \delta_{\text{st } x_j}$, mesure de Dirac.
3. Si f est standard continue et ν a les poids $f(x_j)\delta_k$: $\text{st}_* \nu = f d\lambda$.
4. $\text{st}_* g_j = 0$, $\text{st}_*(D_{j+1} - D_j) = 0$, $\text{st}_* \tau_k = 0$.

Preuve.

1. $\langle \varphi, \mu_k \rangle$ est une somme de Riemann de pas infinitésimal (th. 25 du livre).
2. $\varphi(x_j) \approx \varphi(\text{st } x_j)$ par le lemme.
3. Somme de Riemann de φf .
4. Ce sont les zéros de la hiérarchie.



Définition 21 (Équivalence par la promotion)

$v \approx v'$ si $\text{st}_* v = \text{st}_* v'$, c'est-à-dire $\langle \varphi, v \rangle \approx \langle \varphi, v' \rangle$ pour toute φ standard continue.

Théorème 22 (Trois zéros, une classe)

1. La classe de $\mathbf{0}$ est l'ensemble des zéros faibles ; elle contient $\mathfrak{M}(\mathbf{0})$, qui contient le zéro exact.
2. Deux mesures orientées opposées : zéro **exact** sur une grille commune, zéro **infinitésimal** sur des grilles décalées ; dans les deux cas, équivalentes à $\mathbf{0}$.
3. Le grain est équivalent à la mesure nulle **sans lui être égal** :

$$g_j \approx \mathbf{0} = v + (-v), \quad g_j \neq \mathbf{0}.$$

La forme rigoureuse de la motivation

	exact	infinitésimal	faible
définition	$c_j = 0$ pour tout j	$ v (X) \approx 0$	$\langle \varphi, v \rangle \approx 0$
exemple	$[a \rightarrow b] + [b \rightarrow a]$	grain g_j	tapis alterné τ_k
variation totale	0	δ_k	1
promotion	0	0	0

- La mesure sommatoire nulle de deux mesures orientées opposées sur un même niveau est le **zéro exact**.
- Le grain n'est pas ce zéro : c'est un élément **non nul de sa monade**.
- « Mesure nulle = grain » est juste **à la promotion près**, et fausse au niveau.
- C'est la déf. 88 du livre (point / grain) et la rem. 121 : le grain n'est pas un « zéro épais », il est **équivalent** au zéro.

Option : le cadre de Loeb

- Loeb construit, à partir d'une mesure hyperfinie, une vraie tribu et une mesure σ -additive $L(\mu_k)$ sur X lui-même.
- Pour tout borélien $A \subset [0, 1]$:

$$L(\mu_k)(st^{-1}(A)) = \lambda(A).$$

- La mesure de Lebesgue est l'image, par la promotion des points, de la mesure de comptage normalisée d'un seul niveau, quel qu'il soit.

Le prix : la saturation

Toute suite décroissante de parties internes non vides a une intersection non vide. Cet axiome ne figure pas dans l'axiomatique du livre.

Deux options : rester au théorème de promotion (rigoureux dans le cadre actuel), ou ajouter la saturation. La question reste ouverte.

Familles de niveaux : une filtration

Partie II — explorations

Les énoncés sont démontrés dans des cas modèles ; leur portée générale reste à établir.

1. Familles de niveaux homogènes : une **filtration**.
2. Grains déformés : le **jacobien** comme dérivée de Radon–Nikodym.
3. Le **repliement** fabrique le zéro sommatoire.

Par l'emboîtement, les algèbres des niveaux homogènes forment une suite croissante

$$\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_3 \subset \dots$$

C'est une **filtration**, au sens des probabilités : passer du fin au grossier, c'est oublier l'information interne aux grains grossiers.

Définition 23 (Famille cohérente)

$(\nu_k)_{k \geq 1}$, $\nu_k \in \mathcal{M}_k$, est cohérente si ν_{k+1} restreinte à $\mathcal{A}_k$ est ν_k .

- (μ_k) est cohérente (compatibilité).
- C'est la condition de compatibilité de **Kolmogorov**, transposée à la tour des niveaux.

Moyenne sur les sous-grains, martingale

Proposition 24 (Moyenne sur les sous-grains)

Si (v_k) est cohérente, de densités $\rho^{(k)}$:

$$\rho_j^{(k)} = \frac{1}{2^{n_\infty}} \sum_{\ell=0}^{2^{n_\infty}-1} \rho_{j2^{n_\infty}+\ell}^{(k+1)}.$$

Preuve. $\rho_j^{(k)} \delta_k = v_k(b_j^{(k)}) = \sum_{\ell} \rho_{j2^{n_\infty}+\ell}^{(k+1)} \delta_{k+1}$ et $\delta_k = 2^{n_\infty} \delta_{k+1}$. □

- $\rho^{(k)}$ est l'**espérance conditionnelle** de $\rho^{(k+1)}$ sachant $\mathcal{A}_k$.
- La suite des densités est une **martingale** pour la filtration des niveaux.
- Pont possible vers le calcul stochastique non standard (mouvement brownien d'Anderson).

La promotion ne dépend pas du niveau

Proposition 25

Si (v_k) est cohérente et $|v_{k+1}|(X)$ limitée, alors $\text{st}_* v_k = \text{st}_* v_{k+1}$.

Preuve. On regroupe les sous-grains par grain grossier :

$$\langle \varphi, v_k \rangle - \langle \varphi, v_{k+1} \rangle = \sum_j \sum_{\ell} (\varphi(x_j^{(k)}) - \varphi(x_{j2^{n_{\infty}+\ell}}^{(k+1)})) v_{k+1}(b_{j2^{n_{\infty}+\ell}}^{(k+1)}),$$

majoré par $\omega_{\varphi}(\delta_k) |v_{k+1}|(X) \approx 0$.



Compensation entre niveaux

Une mesure du niveau k et l'opposée d'une mesure du niveau $k+1$ se compensent **exactement** sur $\mathcal{A}_{k+1}$: dans une famille homogène, « même niveau » peut toujours être remplacé par « **niveau commun** ».

Pas commensurables

Pas 2^{-n_∞} et 3^{-n_∞} : raffinement commun de pas 6^{-n_∞} . La compensation exacte reste possible.

Pas incommensurables

Pas 2^{-n_∞} et $\sqrt{2} \cdot 2^{-n_\infty}$: l'algèbre engendrée a des atomes de tailles irrégulières ; compensation exacte des « mêmes » segments en général impossible.

Ce qui compte : la **commensurabilité** des pas, pas leur égalité.

Grains déformés : le jacobien

$f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ standard, de classe C^1 , strictement croissante, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f' > 0$; étendue à $\tilde{\mathbb{R}}$ par transfert (avec le théorème des accroissements finis).

Sens direct : déformation de l'axe vertical

$$f(b_j) = [f(x_j), f(x_{j+1})[, \quad \ell_j = f(x_{j+1}) - f(x_j) = f'(\xi_j) \delta_k, \quad \xi_j \in b_j.$$

Chaque grain est étiré ou contracté par le facteur $f'(\xi_j)$.

Proposition 26

La mesure image $f_*\mu_k$ (masse δ_k sur chaque $f(b_j)$) a pour densité $\delta_k/\ell_j = 1/f'(\xi_j)$ par rapport à la longueur, et

$$\text{st}_*(f_*\mu_k) = (f^{-1})'(y) dy.$$

Preuve. $\sum_j \varphi(f(x_j)) \delta_k \approx \int_0^1 \varphi(f(x)) dx = \int_0^1 \varphi(y)(f^{-1})'(y) dy.$



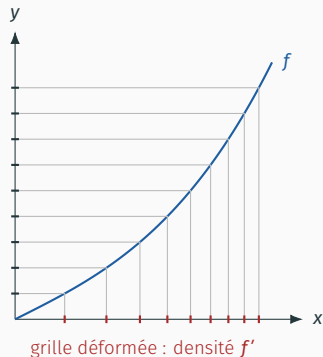
Réciproque : l'axe des abscisses déformé

On part de la grille **uniforme** de l'axe vertical,
 $y_i = i\delta_k$, et on tire ses grains :

$$a_i = f^{-1}([y_i, y_{i+1}[) = [x'_i, x'_{i+1}[,$$

$$|a_i| = \frac{\delta_k}{f'(\eta_i)}, \quad \eta_i \in a_i.$$

L'axe des abscisses reçoit une grille **déformée**,
serrée là où f' est grand, lâche là où f' est petit.



Le jacobien est une dérivée de Radon–Nikodym

Théorème 27

Soit $f^*\mu_k$ la mesure qui donne à chaque grain déformé a_i la masse δ_k de son image.

1. Au niveau : $f^*\mu_k(a_i) = f'(\eta_i) |a_i|$ (exactement).
2. À la promotion : $\text{st}_*(f^*\mu_k) = f'(x) dx$; le jacobien est la **dérivée de Radon–Nikodym** par rapport à Lebesgue.
3. **Changement de variable** : pour g standard continue, $\sum_i g(f(x'_i)) \delta_k = \sum_i g(y_i) \delta_k$ exactement, et la promotion donne $\int_0^1 g(f(x)) f'(x) dx = \int_0^1 g(y) dy$.

Preuve.

1. $|a_i| = \delta_k / f'(\eta_i)$.
2. $\sum_i \varphi(x'_i) \delta_k = \sum_i \varphi(x'_i) f'(\eta_i) |a_i|$: somme de Riemann de $\varphi f'$, à un infinitésimal près.
3. Réindexation, puisque $f(x'_i) = y_i$. □

Deux remarques

Le changement de variable devient une identité

Classiquement, la formule du changement de variable demande une démonstration. Au niveau, c'est une **identité exacte** : on compte les mêmes grains de deux façons. La promotion la transforme en égalité d'intégrales.

Orientation

Si f est **décroissante**, les grains déformés sont parcourus en sens inverse. Comme mesure orientée, $f^*\mu_k$ a la densité $f' < 0$: c'est le **jacobien signé** qui est la dérivée de Radon–Nikodym. La mesure orientée garde la trace du retournement que la mesure positive efface.

Points critiques : le jacobien change le niveau

Pour $f(x) = x^2$, dont le jacobien s'annule en 0 :

$$a_0 = f^{-1}([0, \delta_k]) = [0, \sqrt{\delta_k}], \quad \sqrt{\delta_k} = 2^{-kn_\infty/2}.$$

- Encore infinitésimal, mais d'un **autre ordre** : niveau $-kn_\infty/2$.
- Plus loin, $|a_i| = \sqrt{\delta_k}(\sqrt{i+1} - \sqrt{i})$ décroît jusqu'à $\approx \delta_k/2$ près de 1 : la grille déformée **interpole** entre deux niveaux.

Proposition 28

Pour $f(x) = x^m$, l'image réciproque du premier grain de niveau k a l'épaisseur $2^{-kn_\infty/m}$: un jacobien qui s'annule à l'ordre $m - 1$ fait **remonter** la tour d'un facteur m .

- Inverse de la rem. 122 du livre (un facteur contractant fait **descendre** la tour).
- C'est un grain du niveau de résolution $-kn_\infty/m$ dès que m divise kn_∞ : pas de niveaux nouveaux, une question de **divisibilité**.

Un jacobien infinitésimal fabrique un Dirac

Le jacobien du plan à deux résolutions : $f(y) = Jy, J = 2^{-n_\infty}$.

Proposition 29

L'image de μ_k est portée par le seul grain $[0, J[$ du niveau 1 :

$$(J\cdot)_* \mu_k = 2^{n_\infty} \mu_{k+1} \Big|_{[0, J[}, \quad \text{st}_* ((J\cdot)_* \mu_k) = \delta_0.$$

Preuve. b_j a pour image $[Jx_j, Jx_{j+1}[$, de longueur $J\delta_k = \delta_{k+1}$: c'est $b_j^{(k+1)} \subset [0, J[$, de masse $\delta_k = 2^{n_\infty} \delta_{k+1}$. Tous les Jx_j sont infiniment proches de 0. $\square$

- Toute la grille du niveau k est copiée au niveau $k + 1$ dans **un seul grain** du niveau 1 : auto-similarité du situs.
- **Un Dirac est une mesure de Lebesgue contractée par un jacobien infinitésimal.**
- Concentration et étalement : deux faces d'un même changement de niveau.

Le repliement fabrique le zéro
sommatoire

Définition 30 (Image orientée)

Pour f continue, strictement monotone sur chaque grain, l'image orientée de $+[x_j \rightarrow x_{j+1}]$ est $[f(x_j) \rightarrow f(x_{j+1})]$; on étend par additivité. Notation : $f_{\#}$.

C'est l'image au sens des chaînes (ou des courants), pas des mesures positives : elle tient compte du sens de parcours.

Théorème 31 (Le repliement)

Sur la grille symétrique $x_j = j\delta_k$, $-N_k \leq j \leq N_k$, de $[-1, 1]$, et pour $f(x) = x^2$:

$$f_{\#}[-1 \rightarrow 1] = 0 \quad \text{exactement, grain par grain,}$$

alors que l'image positive se promeut en $y^{-1/2} dy$ sur $[0, 1]$.

Preuve et figure

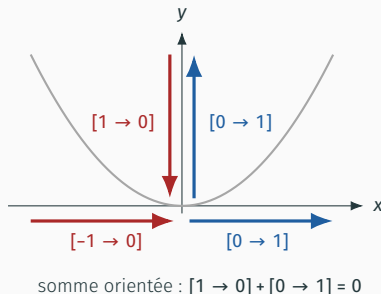
Preuve. Par Chasles,

$$[-1 \rightarrow 1] = \sum_j ([-x_{j+1} \rightarrow -x_j] + [x_j \rightarrow x_{j+1}]).$$

L'image de chaque paire est

$$[x_{j+1}^2 \rightarrow x_j^2] + [x_j^2 \rightarrow x_{j+1}^2] = 0$$

par la compensation exacte, sur la grille commune des x_j^2 . L'image positive compte chaque grain déformé deux fois : $2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} dy$. $\square$

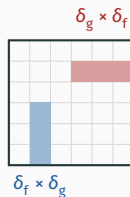


Lecture du repliement

- La mesure sommatoire nulle n'a pas seulement une définition : elle a une **origine géométrique**, c'est la trace d'un repliement.
- Le repliement produit **automatiquement une grille commune** (les deux moitiés d'une grille symétrique ont les mêmes images x_j^2) : d'où une compensation exacte, et pas seulement infinitésimale.
- On retrouve les « **deux droites superposées** » de *Plan complexe et grain nul* : deux copies parcourues en sens inverse ont une somme orientée nulle.
- Dans le plan complexe, $z \mapsto z^2$ replie l'axe réel sur $\mathbb{R}_{\geq 0}$ et l'axe imaginaire sur $\mathbb{R}_{\leq 0}$ (car $(iy)^2 = -y^2$) : les deux axes ont une image orientée nulle.

Le plan à deux résolutions et la mesure d'aire

- La grille $\Gamma = \delta_f \tilde{\mathbb{Z}} + i \delta_g \tilde{\mathbb{Z}}$ définit une algèbre produit, d'atomes $\delta_f \times \delta_g$.
- i envoie un atome sur un rectangle $\delta_g \times \delta_f$: il conserve l'aire, pas l'algèbre (symétrie brisée).
- Or $\delta_g = 2^{n_\infty} \delta_f$: la grille carrée fine $\delta_f \tilde{\mathbb{Z}} + i \delta_f \tilde{\mathbb{Z}}$ raffine à la fois Γ et $i\Gamma$.
- Sur ce raffinement commun, i est une symétrie et les compensations sont exactes.



les deux sont réunions de carrés fins $\delta_f \times \delta_f$

La symétrie brisée au niveau des grains est restaurée pour les mesures dès le niveau fin commun, sans attendre la promotion.

Synthèse

Théorie du grain

grille d'un niveau

emboîtement des niveaux (prop. 53)

mesure d'un grain conservée (th. 53)

intégrale stratifiée (déf. 42)

grain orienté

compensation sur un même niveau

grain (déf. 88, rem. 121)

anti-Dirac

promotion **st**

déformation jacobienne

réciroque sur l'axe des abscisses

jacobien infinitésimal J

deux droites superposées

Théorie de la mesure

algèbre hyperfinie $\mathcal{A}_k$, atomes = grains

filtration $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \dots$

cohérence $\mu_{k+1}|_{\mathcal{A}_k} = \mu_k$

$\langle \varphi, \nu \rangle$, somme hyperfinie

mesure signée, Jordan

zéro exact

zéro infinitésimal, élément de $\mathfrak{M}(0)$

tapis alterné, zéro faible

st_{*}, par le théorème de Riesz

mesure image, densité $\mathbf{1}/f'$

densité f' : Radon–Nikodym

fabrication d'un Dirac

repliement, image orientée nulle

Ce qui est établi

- Sur un niveau de résolution, la théorie est **complète et élémentaire** : tout se calcule grain par grain.
- La mesure sommatoire nulle de deux mesures orientées opposées est le **zéro exact** dès qu'elles vivent sur une grille commune ; sur des grilles décalées, la compensation n'est qu'infinitésimale.
- Le grain est un **zéro infinitésimal** : distinct du zéro exact au niveau, confondu avec lui par la promotion.
- La promotion **st_{*}** envoie les mesures de variation limitée sur les **mesures de Radon** standard, sans saturation.

Questions ouvertes

1. **Saturation.** Faut-il l'ajouter à l'axiomatique du grain pour disposer de la théorie de Loeb complète, ou le théorème de promotion suffit-il ?
2. **Divisibilité aux points critiques.** Les épaisseurs $2^{-kn_\infty/m}$ sont des grains dès que m divise kn_∞ : quelles conditions de divisibilité demander à n_∞ ?
3. **Grilles incommensurables.** Structure de l'algèbre engendrée, meilleure compensation possible ?
4. **Dimension deux.** Algèbres produits du plan à deux résolutions, raffinements communs, action de ω sur les mesures d'aire.
5. **Martingales.** La filtration des niveaux pourrait fournir un modèle stratifié du mouvement brownien.

- H. Genvrin, *Théorie du grain*, manuscrit, 2026 (chap. 4, 10, 15).
- H. Genvrin, *Une théorie de la mesure du grain*, manuscrit, 2026.
- H. Genvrin, *Du cercle complexe au plan complexe ; Plan complexe et grain nul*, manuscrits, 2026.
- P. A. Loeb, « Conversion from nonstandard to standard measure spaces and applications in probability theory », *Trans. AMS* **211** (1975), 113–122.
- N. J. Cutland, « Nonstandard measure theory and its applications », *Bull. LMS* **15** (1983), 529–589.
- S. Albeverio, J. E. Fenstad, R. Høegh-Krohn, T. Lindstrøm, *Nonstandard Methods in Stochastic Analysis and Mathematical Physics*, Academic Press, 1986.
- W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1987.
- L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, 1950–1951.