

Transport de métriques

De $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ vers $\mathcal{G}_{-n_\infty}$ et réciproquement

Hugues Genvrin

30 juin 2026

Plan

- 1 Configuration initiale
- 2 Les trois transformations
- 3 La métrique logarithmique
- 4 Réciprocité
- 5 Synthèse

Heuristique du changement d'échelle

Intuition combinatoire avant la construction formelle.

On construit une application $\Phi : \mathcal{G}_{-2n_\infty} \rightarrow \mathcal{G}_{-n_\infty}$ par regroupement des grains fins en paquets.

Niveau positions. Chaque grain $g_{-2n_\infty}^k$ occupe la position $k/2^{2n_\infty}$ sur C_1 . Après changement de référence, cette position devient $k/2^{n_\infty}$ (homothétie de rapport 2^{n_∞}).

Niveau combinatoire. Les 2^{n_∞} premiers grains fins forment ensemble le premier grain grossier :

$$\bigcup_{k=1}^{2^{n_\infty}} g_{-2n_\infty}^k \mapsto g_{-n_\infty}^1.$$

Plus généralement, le j -ième paquet de 2^{n_∞} grains fins forme le j -ième grain grossier :

$$\bigcup_{k=(j-1)2^{n_\infty}+1}^{j \cdot 2^{n_\infty}} g_{-2n_\infty}^k \mapsto g_{-n_\infty}^j.$$

En particulier, le cercle entier est préservé : $\bigcup_{k=1}^{2^{2n_\infty}} g_{-2n_\infty}^k = C_1 \mapsto \bigcup_{k'=1}^{2^{n_\infty}} g_{-n_\infty}^{k'} = C_1$.

Niveau échelle logarithmique. Translation additive :

$$0 \mapsto -n_\infty \ln 2, \quad n_\infty \ln 2 \mapsto 0, \quad 2n_\infty \ln 2 \mapsto n_\infty \ln 2.$$

Question centrale. Comment représenter les grains de $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ sur l'échelle de $\mathcal{G}_{-n_\infty}$, et réciproquement ?

Notations.

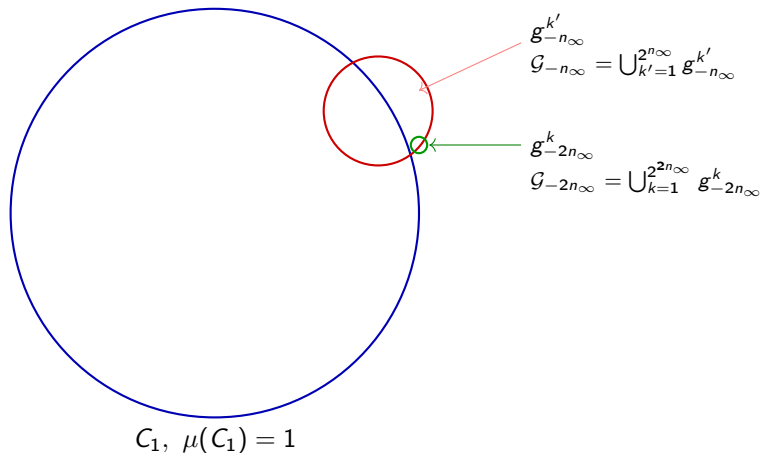
- $\mathbb{R}_e := \widetilde{\mathbb{R}}$: corps des réels étendus, dont $\mathbb{R}$ est le corps standard.
- $\mathcal{G}_{-kn_\infty}$: niveau stratal de résolution à l'épaisseur élémentaire $1/2^{kn_\infty}$.
- $g_{-mn_\infty}^k$: k -ième grain du niveau $-mn_\infty$.

Méthode. Construction d'une métrique logarithmique par trois opérations successives :

- 1 Homothétie de dilatation.
- 2 Refactorisation à l'échelle dilatée.
- 3 Contraction logarithmique pour rapatrier dans $\mathbb{R}$.

Résultat visé. Métrique logarithmique stratale, invariante par homothétie multiplicative, qui exprime structurellement l'absence d'échelle privilégiée entre $\mathcal{G}_{-n_\infty}$ et $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$.

Deux continus sur le cercle unité



Lecture. Le cercle unité C_1 porte deux mosaïques superposées : mosaïque grossière (rouge) au niveau $-n_\infty$, mosaïque fine (verte) au niveau $-2n_\infty$. Un grain de la fine est inclus dans un grain de la grossière.

Les deux factorisations du continu

Le même cercle C_1 admet deux factorisations équivalentes selon le niveau de résolution :

Factorisation fine $(-2n_\infty)$.

$$f_1 = \left(1, 2^{2n_\infty}, \frac{1}{2^{2n_\infty}} \right).$$

2^{2n_∞} grains d'épaisseur élémentaire $1/2^{2n_\infty}$.

Factorisation grossière $(-n_\infty)$.

$$f_2 = \left(1, 2^{n_\infty}, \frac{1}{2^{n_\infty}} \right).$$

2^{n_∞} grains d'épaisseur élémentaire $1/2^{n_\infty}$.

Question

Comment varient les grains $g_{-2n_\infty}^k$ sur l'échelle de $\mathcal{G}_{-n_\infty}$?

Autrement dit : comment se représentent les grains du niveau fin *relativement* au niveau grossier ?

Stratégie. Représenter les grains de $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ sur une échelle réelle standard, en partant du grain de base d'épaisseur $1/2^{n_\infty}$ (référence du niveau grossier).

Étape 1 : Homothétie de dilatation

Opération. On applique une homothétie externe de rapport 2^{n_∞} telle que :

$$h_{2^{n_\infty}}(g_{-2^{n_\infty}}^k) = g_{-n_\infty}^k.$$

Équivalence homothétie externe / interne

L'homothétie externe (dilatation des positions par 2^{n_∞}) est *équivalente* à une homothétie interne (subdivision de l'épaisseur par 2^{n_∞}) sur le plan du *rapport d'échelle*.

Ce qui compte structurellement n'est pas l'opération géométrique absolue, mais le *ratio* entre longueur totale et épaisseur élémentaire. Les deux opérations préservent ce ratio à un facteur près qu'on absorbe par refactorisation.

Effet sur le continu. Le cercle C_1 de circonférence 1 est transformé en un objet de longueur 2^{n_∞} . Les positions sont dilatées, mais la structure relative entre les deux mosaïques est préservée.

Sortie de $\mathbb{R}$. On se retrouve dans $\mathbb{R}_e$ (corps des réels étendus) : la longueur totale 2^{n_∞} est un entier non standard.

Étape 2 : Refactorisation à l'échelle dilatée

Refactorisations équivalentes après homothétie.

Pour le niveau fin :

$$f'_1 = \left(2^{n_\infty}, 2^{2n_\infty}, \frac{1}{2^{n_\infty}} \right).$$

2^{2n_∞} grains de la mosaïque fine, mais maintenant d'épaisseur $1/2^{n_\infty}$ (l'ancienne référence du niveau grossier).

Pour le niveau grossier :

$$f'_2 = (2^{n_\infty}, 2^{n_\infty}, 1).$$

2^{n_∞} grains de la mosaïque grossière, maintenant d'épaisseur 1.

Vérification. Longueur = cardinal $\times$ épaisseur :

- $f'_1 : 2^{2n_\infty} \cdot 1/2^{n_\infty} = 2^{n_\infty} . \checkmark$
- $f'_2 : 2^{n_\infty} \cdot 1 = 2^{n_\infty} . \checkmark$

Statut. On est dans $\mathbb{R}_e$ avec des grandeurs infinies au sens de $\mathbb{R}$. Il faut maintenant rapatrier dans $\mathbb{R}$.

Étape 3 : Contraction logarithmique

Opération. Pour rapatrier les grandeurs de $\mathbb{R}_e$ vers $\mathbb{R}$, on applique la *contraction logarithmique* : $x \mapsto \ln(x)$.

Justification structurelle.

- Le logarithme transforme la *multiplicativité* en *additivité* : $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$.
- L'homothétie multiplicative ($\cdot 2^{n_\infty}$) devient une translation additive ($+n_\infty \ln 2$).
- Les grandeurs infinies dans $\mathbb{R}_e$ sont ramenées à des valeurs polynomiales dans $\mathbb{R}$: 2^{n_∞} devient $n_\infty \ln 2$.

Nouvelle factorisation.

$$f_1'' = (n_\infty \ln 2, 2^{2n_\infty}, \epsilon_h),$$

où ϵ_h est l'épaisseur *hétérogène* induite par le logarithme.

Intervalle de recouvrement

$\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ recouvre sur l'échelle logarithmique l'intervalle :

$$\left] \ln\left(\frac{1}{2^{n_\infty}}\right), \ln(2^{n_\infty}) \right[=] -n_\infty \ln 2, n_\infty \ln 2[.$$

La nature de ϵ_h . Sur l'échelle logarithmique, l'épaisseur du grain de base n'est plus uniforme : elle se *contracte* le long de l'intervalle.

Calcul explicite.

$$\left[\ln \circ h \left(\frac{1}{2^{2n_\infty}} \right), \ln \circ h \left(\frac{1}{2^{n_\infty}} \right) \right] =]-n_\infty \ln 2, \ln 1[=]-n_\infty \ln 2, 0[.$$

Interprétation. L'épaisseur hétérogène signifie :

- Près de 0 (correspondant à des grands x) : grains plus “serrés”.
- Près de $-n_\infty \ln 2$ (correspondant à $x \rightarrow 1/2^{n_\infty}$) : grains plus “étalés”.

Lecture conceptuelle. Cette hétérogénéité est précisément ce qui caractérise une métrique logarithmique : *invariance par homothétie multiplicative*. Le rapport entre deux positions (y/x) est traduit en différence ($\ln y - \ln x$), indépendamment de leur position absolue.

On décrit ainsi $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ sur une *échelle logarithmique*.

Théorème (Transport métrique stratal)

La métrique logarithmique sur $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$, prise *relativement* à $\mathcal{G}_{-n_\infty}$, s'obtient par la composition :

contraction logarithmique $\circ$ refactorisation $\circ$ homothétie de rapport 2^{n_∞} .

Elle est définie par la distance stratale :

$$d_\sigma(x, y) = |\ln(y/x)|,$$

invariante par homothétie multiplicative.

Propriétés clés.

- *Invariance multiplicative* : $d_\sigma(\lambda x, \lambda y) = d_\sigma(x, y)$ pour tout $\lambda > 0$.
- *Linéarisation* : la stratification multiplicative devient une distance additive.
- *Réduction de magnitude* : l'invariant exponentiel 2^{n_∞} devient l'invariant polynomial $n_\infty \ln 2$.

Statut. La métrique logarithmique n'est *pas absolue*. Elle est définie relativement au niveau $\mathcal{G}_{-n_\infty}$ choisi comme référence.

Choix de la référence. Si l'on choisit $\mathcal{G}_{-n_\infty}$ comme référence, on obtient une métrique logarithmique sur $] -n_\infty \ln 2, n_\infty \ln 2[$.

Autre référence possible. Si l'on choisit $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ comme référence pour $\mathcal{G}_{-3n_\infty}$, on obtient une métrique logarithmique sur $] -2n_\infty \ln 2, 2n_\infty \ln 2[$.

Plus généralement. Pour le passage entre niveaux $\mathcal{G}_{-kn_\infty}$ et $\mathcal{G}_{-(k+1)n_\infty}$, la métrique logarithmique recouvre l'intervalle $] -kn_\infty \ln 2, kn_\infty \ln 2[$.

Lecture épistémologique

La métrique stratale n'est pas une propriété intrinsèque absolue, mais une propriété *relative* au niveau de référence choisi. C'est cohérent avec la construction pragmatique stratale des réels (cf. note correspondante) : les propriétés des objets stratals dépendent du niveau d'observation.

Transport inverse : $\mathcal{G}_{-n_\infty}$ vers $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$

Question réciproque. Comment représenter les grains $g_{-n_\infty}^{k'}$ sur l'échelle de $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$?

Principe. C'est l'opération *inverse* de celle développée précédemment. La composition de trois opérations devient :

contraction inverse $\circ$ refactorisation inverse $\circ$ homothétie inverse.

Le pivot conceptuel. La contraction logarithmique étant réciproque de l'exponentiation, le transport inverse passe par une *échelle exponentielle*.

Proposition (Réciprocité log/exp)

Représenter $\mathcal{G}_{-n_\infty}$ relativement à $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ revient à utiliser une échelle exponentielle, où la position ξ sur l'échelle logarithmique correspond à la position e^ξ sur l'échelle exponentielle.

Les deux transports (logarithmique et exponentiel) sont *bijections inverses l'une de l'autre* :

$$\exp \circ \ln = \text{Id}_{\mathbb{R}^+_*}, \quad \ln \circ \exp = \text{Id}_{\mathbb{R}}.$$

La dualité log/exp comme expression de la réciprocité stratale

Une dualité non accidentelle.

La dualité logarithme/exponentielle dans le programme du grain n'est pas une simple commodité mathématique. Elle exprime la *réciprocité stratale* entre les niveaux $-n_\infty$ et $-2n_\infty$:

- *Du fin vers le grossier* (de $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ vers $\mathcal{G}_{-n_\infty}$) : contraction logarithmique.
- *Du grossier vers le fin* (de $\mathcal{G}_{-n_\infty}$ vers $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$) : dilatation exponentielle.

Cohérence avec d'autres résultats.

- L'*exponentielle complexe stratale* (cf. note dédiée) utilise la même dualité : i émerge géométriquement comme facteur de compatibilité circulaire.
- La *rectification stratale du cercle* utilise la construction logarithmique pour identifier π comme élément de $\widetilde{\mathbb{R}}_2$.

Cohérence interne. La métrique logarithmique stratale est *l'expression métrique unique* d'une structure plus profonde du programme : la dualité multiplicatif/additif entre les niveaux strataux.

Ce qu'on a établi.

Méthode. Trois transformations successives :

- 1 Homothétie de rapport 2^{n_∞} (équivalente à une homothétie interne, sortie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_e$).
- 2 Refactorisation à l'échelle dilatée.
- 3 Contraction logarithmique (retour dans $\mathbb{R}$ avec épaisseur hétérogène).

Résultat. La métrique logarithmique

$$d_\sigma(x, y) = |\ln(y/x)|$$

sur $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ relativement à $\mathcal{G}_{-n_\infty}$, recouvrant l'intervalle $] -n_\infty \ln 2, n_\infty \ln 2[$.

Propriétés.

- Invariance par homothétie multiplicative.
- Linéarisation des structures multiplicatives.
- Réduction de magnitude (exponentielle $\rightarrow$ polynomiale).

Réciprocité. Le transport inverse passe par l'échelle exponentielle. La dualité log/exp exprime la réciprocité stratale entre les niveaux.

Conclusion : la cause profonde du transport

Identification dilatation homothétique = dilatation exponentielle.

$$\frac{1}{2^{2n_\infty}} \mapsto \frac{1}{2^{n_\infty}} = e^{-n_\infty \ln 2}, \quad 1 \mapsto 2^{n_\infty} = e^{n_\infty \ln 2}.$$

L'écriture en base e révèle que l'homothétie multiplicative est structurellement une *dilatation exponentielle*.

Contraction logarithmique comme réciproque. Pour le k -ième grain :

$$\frac{k}{2^{2n_\infty}} \xrightarrow{h_{2^{n_\infty}}} \frac{k}{2^{n_\infty}} \xrightarrow{\ln} \ln k - n_\infty \ln 2.$$

Pourquoi l'enchaînement n'est pas l'identité. On prend le logarithme de l'*image* ($k/2^{n_\infty}$, position dans f_2), non de l'*antécédent* ($k/2^{2n_\infty}$, position dans f_1). L'image étant précisément une position de f_2 , le logarithme transporte vers l'échelle logarithmique de f_2 , non celle de f_1 . C'est la *cause profonde* du transport.

Transport intrinsèque, pas projection. L'opération est une *bijection* préservant toute l'information stratale, à distinguer de l'opérateur de partie standard st qui est une projection *irréversible* de $\tilde{\mathbb{R}}$ vers $\mathbb{R}$ écrasant les infinitésimaux.

Caractérisation finale. Le transport stratal enchaîne deux changements distincts :

Trois lectures de la construction.

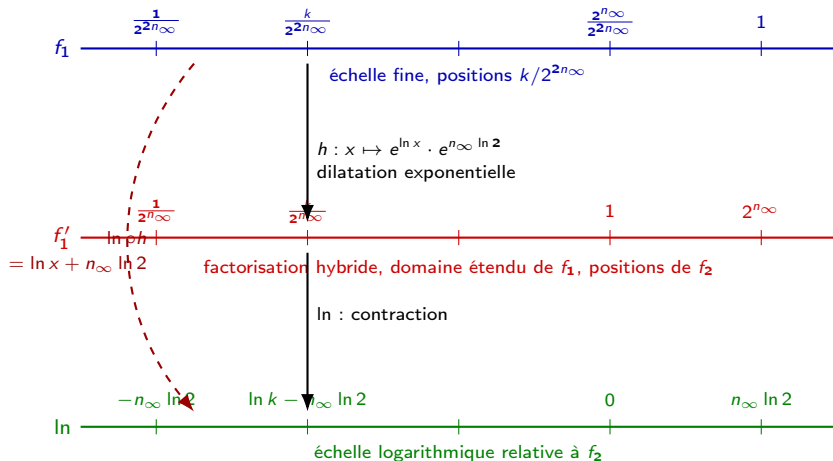
Lecture géométrique. La métrique logarithmique est la *coordonnée canonique* du transport stratal. Elle linéarise les structures multiplicatives du programme.

Lecture épistémologique. La métrique n'est pas absolue, mais *relative* au niveau de référence choisi. Cela s'inscrit dans la construction pragmatique stratale des réels : les propriétés des objets stratals dépendent du niveau d'observation.

Lecture structurelle. La dualité log/exp est l'expression unique d'une structure plus profonde du programme : la *réciprocité stratale* entre les niveaux $-n_\infty$ et $-2n_\infty$. La même dualité apparaît dans l'exponentielle complexe stratale, la rectification du cercle, et la construction pragmatique des réels.

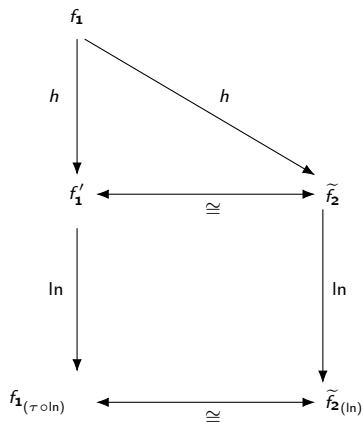
Cohérence interne. Un seul mécanisme structurel (la multiplication comme opérateur de stratification) gouverne toutes les constructions du programme. La métrique logarithmique en est l'expression métrique canonique.

Schéma synthèse du transport



- **Double statut de l'image.** $h(x) = k/2^{n_\infty}$ vit dans f_2 (par image) et dans f'_1 (par extension du domaine de k).

Diagramme catégorique du transport



Lecture. Le diagramme commute : les deux chemins de f_1 vers le bas aboutissent à des objets identifiés par $\cong$.

- **Chemin gauche** : $f_1 \xrightarrow{h} f'_1 \xrightarrow{\ln} f_{1(\tau \circ \ln)}$ (translation de la contraction logarithmique de f_1).
- **Chemin droit** : $f_1 \xrightarrow{h} \tilde{f}_2 \xrightarrow{\ln} \tilde{f}_{2(\ln)}$ (contraction logarithmique pure de $\tilde{f}_2$).

La commutativité est le transport stratal. Le même objet final admet deux lectures structurellement équivalentes : translation d'un côté, échelle pure de l'autre.

Merci.

Questions ?

hugues@genvrin.fr

Hugues Genvrin

Programme du grain

30 juin 2026